

注意：解答用紙は 1 問につき 1 枚とし、解答した問題番号を明示すること。
解答用紙の「学籍番号」は「受験番号」と読み替えること。

1. 次の問に答えよ。

(1) p を定数とする。次の 3 次正方行列 A の固有値をすべて求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1-2p & 2p & 0 \\ p & 1-3p & 0 \\ p & p & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $a > 0$ とする。未知関数 $y(x)$ に対する微分方程式

$$y' = y^2$$

の解 y で $y(0) = a$ をみたすものを求めよ。

2. r を実数とする。次の問に答えよ。

(1) 未知関数 $y(x)$ に対する微分方程式

$$y'' + ry = 0$$

の解で $y(0) = y(\pi) = 0$ をみたすものを全て求めよ。

(2) $r \neq 1$ とする。未知関数 $y(x)$ に対する微分方程式

$$y'' + ry = \sin x$$

の解で $y(0) = y(\pi) = 0$ をみたすものを全て求めよ。

(3) 未知関数 $y(x)$ に対する微分方程式

$$y'' + y = \sin x$$

の解で $y(0) = y(\pi) = 0$ をみたすものは存在しないことを示せ。

3. 以下の広義積分 (1) (2) について、積分が収束するために実数 a, b が満たすべき条件を求めよ。ただし、三角関数について加法定理・半角公式 $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$ などの一連の等式および不等式

$$\frac{2}{\pi} \theta \leq \sin \theta \leq \theta \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

は証明なしに用いてよい。

$$(1) \int_0^{\pi/2} \frac{(1 + \cos x)^a}{x(\sin x)^b} dx$$

$$(2) \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{(1 + \cos x)^a}{x(\sin x)^b} dx$$

4. 次の問に答えよ．ただし，以下では行ベクトル w を転置した列ベクトルを w^t で表す．

(1) 4 次正方行列

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の核 $\text{Ker } L = \{v = (v_1, v_2, v_3, v_4)^t \in \mathbb{R}^4 : Lv = 0\}$ の基底を一組求めよ．

(2) 実数 a と 3 以上の整数 n に対して， n 次正方行列 M を

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -(n-2) & n-1 & -1 \\ -a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

と定める．すなわち， $2 \leq i \leq n-1$ については M の (i, j) 成分 M_{ij} を

$$M_{ij} = \begin{cases} -(i-1) & (j = i-1) \\ i & (j = i) \\ -1 & (j = i+1) \\ 0 & (j \neq i-1, i, i+1) \end{cases}$$

とする．このとき， $\text{Ker } M$ の元 $v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)^t$ について $v_{k+1} - v_k$ ($2 \leq k \leq n-1$) および v_k ($3 \leq k \leq n$) を v_1, v_2 を用いて表せ．

(3) M の階数について $\text{rank } M = n-2$ となるための a の条件を求めよ．