2020 年度第 3 年次編入学試験問題：数学

神戸大学理学部数学科
2019 年 7 月 6 日
時間：10:00–12:00

注意：解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題番号を明示すること．
解答用紙の「学籍番号」は「受験番号」と読み替えること．

1. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

について次の問に答えよ．

(1) 固有値を求めよ．

(2) $T^{-1}AT$ が対角行列となるような直交行列 T を一つ求めよ．また $T^{-1}AT$ を求めよ．

2. (1) A, B を n 次正方行列とするとき，等式

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A-B)\det(A+B)$$

を示せ．

(2)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & x & x & x & x \\ x & 1 & x & x & x \\ x & x & 1 & x & x \\ x & x & x & 1 & x \\ x & x & x & x & 1 \end{pmatrix}$$

とおく．

(a) C が正則行列でないとき，x の値を求めよ．

(b) C の階数を求めよ．

3. (1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq x\}$ とするとき，積分

$$\iint_D x \log(x^2+y^2)\, dxdy$$

の値を求めよ．

(2) a を実数の定数とするとき，2 変数関数 $f(x,y) = x^3 + x^2 + y^2 + axy$ の停留点を求め，各停留点が極大点か極小点か極値点でないか判定せよ．

4. 数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ を次で定める．

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n.$$

(1) 全ての n について $a_n > 0$ であることを示せ．

(2) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列であることを示せ．

(3) 極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}$$

が存在するかどうか調べ，存在する場合はその極限値を求めよ．