

問題 1 から問題 4 の 4 問 に解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題番号を明示すること．すべての解答用紙に名前と受験番号（学籍番号の欄に書け）を書くこと．

問題 1. 次の問に答えよ．

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して， $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P をひとつ求めよ．

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ x & 1 & x^2 - 14 \end{pmatrix}$ に対して，その行列式が 0 となるような x を求めよ．

(3) x が (2) で求めたそれぞれの値のとき， B が対角化可能かどうか調べよ．

問題 2. 以下の命題 (P1)~(P5) について，真なら証明を与え，偽なら反例を挙げよ．

(P1) 位数 4 の群はアーベル群である．

(P2) 位数 6 の群はアーベル群である．

(P3) 位数 10 の群はアーベル群である．

(P4) 位数 45 の群はアーベル群である．

(P5) 素数位数の群はアーベル群である．

問題 3. 次の問に答えよ．

(1) 2 つの実数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ は同一の極限值 L に収束するとする．このとき，各正整数 m に対し $c_{2m-1} = a_m$, $c_{2m} = b_m$ と定めると，数列 $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ は L に収束することを示せ．

(2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq \pi, 2y > |x|\}$ とおく．積分

$$\iint_D \cos\left(\frac{x^2}{4} + y^2\right) dx dy$$

の値を求めよ．

(3) 定数 $p, q \in (1, \infty)$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすとし，関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = \frac{e^{2px}}{p} + \frac{e^{2qy}}{q} - e^{x+y}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

により定める．このとき， f は $\mathbb{R}^2$ のある 1 点でのみ極値をとることを示し，その極値を p, q を含まない形で求めよ．

問題 4. $(X, \mathcal{O})$ は位相空間とする. ただし, $\mathcal{O}$ は開集合族とする. 次の問に答えよ.

(1) $(X, \mathcal{O})$ がコンパクトであることの定義を述べよ.

(2) X の部分集合族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が以下の条件を満たすとする.

- 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $A_\lambda \in \mathcal{O}$ かつ $A_\lambda \neq \emptyset$ が成り立つ.
- 任意の相異なる $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ に対し $A_\lambda \cap A_{\lambda'} = \emptyset$ が成り立つ.
- 任意の $x \in X$ に対しある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $x \in A_\lambda$ が成り立つ.

このとき, $(X, \mathcal{O})$ がコンパクトなら, Λ は有限集合であることを示せ.

(3) $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ とする. X 上の位相 $\mathcal{O}$ が, 任意の $0 \leq a < b < 1$ に対して $(a, b] \in \mathcal{O}$ を満たすとき, $(X, \mathcal{O})$ はコンパクトではないことを示せ.

問題は問題 A から問題 G までの 7 問ある。これらの問題から任意の 2 問を選んで解答せよ。解答用紙は 1 問につき 1 枚とし、解答した問題の記号を明示すること。すべての解答用紙に名前と受験番号 (学籍番号の欄に書け) を書くこと。

問題 A. $(X^3 - 2)(X^2 - 2) \in \mathbb{Q}[X]$ の最小分解体を K とする。次の問に答えよ。ただし、体の有限拡大 F_1/F_2 に対し、その拡大次数を $[F_1 : F_2]$ と書く。

- (1) 正の整数 n に対し、 $\mathbb{Q}(\sqrt[n+1]{2}, \sqrt[n]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[m]{2})$ となる正の整数 m を与えよ。また、 $[\mathbb{Q}(\sqrt[n+1]{2}, \sqrt[n]{2}) : \mathbb{Q}]$ を求めよ。
- (2) $[K : \mathbb{Q}]$ を求めよ。
- (3) $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の位数 3 の元を全て求めよ。
- (4) L を $[L : \mathbb{Q}] = 4$ となる K の部分体とする。 $L/\mathbb{Q}$ はガロア拡大であることを示せ。
- (5) $K/\mathbb{Q}$ はアーベル拡大かどうか答えよ。

問題 B. $\mathbb{C}[x, y]$ のイデアル I を

$$I = (xy - x^2, y^2 - x^2, x^3 - x^2)$$

で定め、 $A = \mathbb{C}[x, y]/I$ とおく。また、環準同型写像 $\varphi: \mathbb{C}[x, y] \rightarrow \mathbb{C}[u, v]$ を $\varphi(f(x, y)) = f(u, u+v)$ で定め、 $J = \varphi(I)$ とする。次の問に答えよ。

- (1) J は $\mathbb{C}[u, v]$ のイデアルであり、また $J = (uv, v^2, u^2(u-1))$ であることを示せ。
- (2) $B = \mathbb{C}[u, v]/J$ とおく。 B の $\mathbb{C}$ 線形空間としての次元 $\dim_{\mathbb{C}}(B)$ を求めよ。
- (3) A の幂零元で $\mathbb{C}$ 上一次独立なものを 2 つ求めよ。

問題 C. 3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 X と Y を

$$\begin{aligned} X &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1\} \\ &\quad \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 1\} \cup \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}, \\ Y &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2 + z^2 - 1)(x^2 + y^2 + z^2 - 4)(x^2 + y^2) = 0\} \end{aligned}$$

で定める。次の問に答えよ。

- (1) X と Y を図示せよ。
- (2) X は 2 つの円周 S^1 と 2 つの 2 次元球面 S^2 との一点和 $S^1 \vee S^1 \vee S^2 \vee S^2$ にホモトピー同値であることを説明せよ。
- (3) X と Y はホモトピー同値であることを示せ。
- (4) Y の基本群 $\pi_1(Y)$ およびホモロジー群 $H_n(Y)$ ($n = 0, 1, 2$) を求めよ。

問題 D. 次の問に答えよ.

- (1) 写像 $f(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$ で定まる曲面 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ のガウス曲率 K と平均曲率 H を求めよ.
- (2) (1) の f に対して, f 上の曲線 $\gamma(u) = f(u, 1)$ の測地曲率 κ_g と法曲率 κ_n を求めよ.
- (3) $U \subset \mathbb{R}^2$ を領域とする. 曲面 $g: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対して $g(U)$ が直線 l を含むとする. このとき, l が g 上の曲線として測地線であるような l のパラメーター表示が存在することを示せ.

問題 E. $n, k \in \mathbb{Z}$ と $x \in (0, 1)$ に対して

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C z^n (z - x)^k dz$$

と定める. ここで, C は 0 を中心とする単位円周を正の向きに一周する複素平面内の積分路とする. 次の問に答えよ.

- (1) $n, k \geq 0$ のとき, $f(x)$ の値を求めよ.
- (2) $n \leq -1$ かつ $k \geq 0$ のとき, $f(x)$ の値を求めよ.
- (3) $n \geq 0$ かつ $k \leq -1$ のとき, $f(x)$ の値を求めよ.
- (4) $n, k \leq -1$ のとき, $f(x)$ の値を求めよ.

問題 F. f を $\mathbb{R}$ 上の非負値ルベグ可積分関数とする. $t > 0$ に対し $E_t = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > t\}$ とおく. 次の問に答えよ. ただし, m は $\mathbb{R}$ 上のルベグ測度を表す.

- (1) 任意の $t > 0$ に対して $m(E_t) < \infty$ であることを示せ.
- (2) 関数 $\phi: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ を $\phi(t) = m(E_t)$ で定める. このとき, ϕ は単調非増加であることを示せ.
- (3) 等式

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_0^\infty m(E_t) dt$$

を示せ. なお, 必要ならば非負値可測関数に対する Tonelli の定理, すなわち非負値可測関数 $H(x, t)$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\infty H(x, t) dt \right) dx = \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}} H(x, t) dx \right) dt$$

が成り立つことを用いてよい.

- (4) 等式

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t m(E_t) = 0$$

を示せ.

問題 G. 0 から 31 までの整数からなる集合を E とする. E の部分集合 S に対し, 整数 n_S を $n_S := \sum_{i \in S} 2^i$ と定義する. このような部分集合 $S \subseteq E$ と整数 n_S の対応を用いて, `sizeof(unsigned int)` の値が 4 である C 言語で種々の集合演算を実現することを考えよう. ここで, $\ll$ は左シフト演算, $\&$ はビットごとの論理積, $|$ はビットごとの論理和, $\wedge$ はビットごとの排他的論理和を表す. 次の問に答えよ.

- (1) 集合 $S, T \subseteq E$ に対応する整数 n_S, n_T を保持した `unsigned int` 型のデータをそれぞれ `n_S, n_T` とする. このとき,

$$n_S \wedge n_T \& n_S$$

に保持されている整数に対応する集合を S, T と集合演算 $\cap, \cup, \setminus$ を用いて表せ.

E の部分集合 S は, 配列 `int S[N]` に

- `S[0]` は集合の要素数,
- $i > 0$ に対し, `S[i]` は S の i 番目の要素

という形式で格納されたとする. 例えば $S = \{0, 2, 15, 4\}$ は, `S[0] = 4, S[1] = 0, S[2] = 2, S[3] = 15, S[4] = 4` と格納される.

- (2) 次ページのプログラムの (あ) の部分に, E の部分集合 S を格納する配列 `S` を入力とし, 整数 n_S を `unsigned int` 型のデータとして出力する関数 `Set2Int` を書け.
- (3) 次ページのプログラム内の関数 `Func` の入力として, 要素数が k ($0 \leq k \leq 32$) の集合 $S \subseteq E$ を格納する `int` 型配列 `S` を与えたとき, `Func` 内の外側の `for` 文のループは何回生じるか. k を用いて表せ.
- (4) `Set2Int` が正しく記述されているとする. このとき, 次ページのプログラムの実行結果はどのようなになるか.

```

#include <stdio.h>

unsigned int Set2Int(int S[]){
    /* (あ) */
}

void Int2Set(unsigned int n_S, int S[]){
    int count = 0;
    for(int i = 0; i < 32; i++){
        if(n_S & (1 << i)){
            count++;
            S[count] = i;
        }
    }
    S[0] = count;
}

void Func(int S[]){
    unsigned int n_S = Set2Int(S);
    int T[33];
    for(unsigned int i = n_S; i > 0; i = (i-1) & n_S){
        Int2Set(i, T);
        printf("{");
        for(int j = 0; j < T[0]; j++){
            if(j != T[0]-1) printf("%d,", T[j+1]);
            else printf("%d", T[j+1]);
        }
        printf("}\n");
    }
}

int main(){
    int S[5] = {4, 0, 2, 15, 4};
    Func(S);
    return 0;
}

```