令和 7 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 I

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
2024 年 8 月 21 日
時間：9:30–12:00

問題 1 から問題 4 の 4 問 に解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題番号を明示すること．すべての解答用紙に名前と受験番号 (学籍番号の欄に書け) を書くこと．

問題 1.　次の問に答えよ.

(1) a を実数の定数とする．$A = \begin{pmatrix} 2a+1 & -3a+1 \\ a+2 & -3a+4 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を固有ベクトルに持つ．このとき a の値を求めよ．さらに,

$$P^{-1}(A^4+5A)P = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

となるような実数 α, β と 2 次正則行列 P の組を一組求めよ.

(2) W を $\mathbb{C}$ 上の 3 次元のベクトル空間とし, その部分空間 U, V は $U \cap V = \{0\}$ をみたしているとする．$u_1, u_2 \in U$ が一次独立であり, $v \in V$ は $v \neq 0$ であるとき, u_1, u_2, v は W の基底であることを示せ.

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ の固有多項式を求めよ．また, A^{2025} を求めよ.

問題 2.　次の問に答えよ.

(1) G をアーベル群, N を G の部分群とする．このとき, N は G の正規部分群であり, 剰余群 G/N はアーベル群となることを示せ.

(2) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ は同型になるかを理由と共に答えよ.

(3) n を正の整数とする．$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ が同型になるための n の必要十分条件を理由と共に答えよ．また, n がその条件をみたすとき, 同型写像をひとつ与えよ.

(4) G_1, G_2 を有限群とし, N_1, N_2 をそれぞれ G_1, G_2 の正規部分群とする. また, N_1 と N_2 は同型であり, G_1/N_1 と G_2/N_2 も同型であるとする. この時, G_1 と G_2 は同型になるかを理由と共に答えよ.

問題 3.　次の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x,y) = \cos x + \sin(x+y)$ の $\{(x,y) \mid 0 < x < 2\pi,\ 0 < y < 2\pi\}$ における極値をすべて求めよ.

(2) $D = \left\{(x,y) \mid 0 \le y \le \min\{1-x, x\},\ x^2 \neq y^2\right\}$ に対して，積分 $\displaystyle\iint_D \log(x^2-y^2)\,dxdy$ の値を求めよ.

(3) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ をみたすとする．すべての項が正である数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < \infty$ をみたすとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束することを示せ.

問題 4. 次の問に答えよ.

(1) $f : X \to Y$ を集合 X から集合 Y への写像とし, A を Y の部分集合とする.

(a) f が全射であるならば, $f(f^{-1}(A)) = A$ であることを示せ.

(b) $f(f^{-1}(A)) \neq A$ をみたす集合 X, Y, 写像 $f : X \to Y$ および Y の部分集合 A の例を挙げよ.

(2) $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ から位相空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ への写像とする.

(a) f が連続写像であることの定義を述べよ.

(b) $(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクトであることの定義を述べよ.

(c) f が全射連続写像であり, かつ $(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクトであるならば, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ もコンパクトであることを示せ.

令和 7 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 II

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
2024 年 8 月 21 日
時間：13:00–14:30

問題は問題 A から問題 G までの 7 問ある．これらの問題から任意の 2 問を選んで解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題の記号を明示すること．すべての解答用紙に名前と受験番号 (学籍番号の欄に書け) を書くこと．

問題 A.　次の問に答えよ．

(1) 次の体 K_1, K_2, K_3 について，$\mathbb{Q}$ 上の Galois 拡大かどうかを判定し，Galois 拡大なら Galois 群を求めよ．

(a) $K_1 = \mathbb{Q}\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)$

(b) $K_2 = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2+\sqrt{6}}\right)$

(c) $K_3 = \mathbb{Q}\left(\sqrt{3(2+\sqrt{2})}\right)$

(2) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ が $\mathbb{Q}$ 上代数的とする．$\alpha+\beta$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的であることを示せ．

問題 B.　k を体とし，$k[x,y]$ を k 係数 2 変数多項式環とする．$R \subset k[x,y]$ を

$$\{x^i y^j \in k[x,y] \mid j \le 5i\}$$

が生成する k-部分線形空間とする．次の問に答えよ．

(1) R は $k[x,y]$ の部分環であることを示せ．

(2) x が生成する $k[x,y]$ のイデアル I は $k[x,y]$ の素イデアルであることを示せ．

(3) (2) のイデアル I について，$I \cap R$ は R の極大イデアルであることを示せ．

(4) x が生成する R のイデアル J は R の素イデアルでないことを示せ．

問題 C.　3 次元球体 $B^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 9\}$ の部分集合 X と Y を

$$X = \left\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 4\right\},$$
$$Y = \left\{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3 \le z \le 3\right\}$$

で定める．次の問に答えよ．

(1) $B^3 \setminus Y$ は円周とホモトピー同値であることを説明せよ．また，$B^3 \setminus Y$ の基本群とホモロジー群を求めよ．

(2) $B^3 \setminus (X \cup Y)$ は 2 つの円周の直積とホモトピー同値であることを説明せよ．また，$B^3 \setminus (X \cup Y)$ の基本群とホモロジー群を求めよ．

(3) $B^3 \setminus X$ の基本群とホモロジー群を求めよ．

問題 D. 写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を $f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u+v)$ とする．次の問に答えよ．

(1) f の第一基本形式が v に依存しないことを示せ．

(2) $p \in \mathbb{R}^2$ に対して f の微分 df_p が単射でない点が存在する場合はそれを求め，存在しない場合はそのことを示せ．

(3) f のガウス曲率と平均曲率を求めよ．

(4) f の臍点が存在する場合はそれを求め，存在しない場合はそのことを示せ．

問題 E. $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2-1}$ とする．次の問に答えよ．

(1) $f(z)$ のすべての極とそこでの留数を求めよ．

(2) 原点を中心とし，半径が r（ただし，$r > 1$ とする）の円周を正の向きに一周する積分路 C に沿った積分 $\displaystyle\int_C f(z)dz$ を求めよ．

(3) $f(z)$ の真性特異点 $z = 0$ における留数を求めよ．

(4) 虚軸上を下から上へ向かう積分路に沿った積分 $\displaystyle\int_{-i\infty}^{i\infty} f(z)dz$ を求めよ．

問題 F. f は $\mathbb{R}$ 上の非負な可積分関数とし，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ をみたす正数の列とする．次の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x/a_n)\,dx < \infty$ を示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(x/a_n)$ は $\mathbb{R}$ 上の可積分関数に概収束することを示せ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(x/b_n)$ が $\mathbb{R}$ 上可積分なら $f = 0$ a.e. であることを示せ．

問題 G. sizeof(int) の値が 4 である C 言語について，次の問に答えよ．ただし，int 型のデータは 2 の補数表現で表されているものとする．また，$2^{31} = 2147483648$ である．

(1) 2 の補数表現による int 型データが表現できる最小の値を答えよ．

(2) C 言語における，int 型データに対する排他的論理和演算子 `^` は，2 つの int 型データ `a,b` に対して，`a,b` を表す各 bit ごとに，次のような結果を与える演算子である：

`0^0 = 0,  0^1 = 1,  1^0 = 1,  1^1 = 0.`

以下のプログラムの実行結果は，どのようになるか．理由を付けて解答せよ．

```
#include <stdio.h>
int main() {
   int a = -1, b = 0;
   b = a^b;
   a = a+b;
   printf("%d\n", a);
   return 0;
}
```

(3) 以下のプログラムの実行結果は，どのようになるか．理由を付けて解答せよ．

```
#include <stdio.h>
int main() {
   int a = -1, b = 0;
   a = a^b;
   b = a^b;
   a = a^b;
   printf("%d, %d\n", a, b);
   return 0;
}
```

(4) 大きさが 2 である int 型の 1 次元配列 v の 2 つの要素を入れ替える関数を C 言語で書け．すなわち，`v[0] = a`，`v[1] = b` であれば，実行後は，`v[0] = b`，`v[1] = a` となる関数を作成せよ．ただし，この関数は配列 v を引数とするものとし，v 以外に，新たに変数を定義してはならない．また，関数を定義する際，入力される配列 v の大きさは，少なくとも 2 以上であることを仮定してよい．