令和 3 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 I

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
2020 年 8 月 20 日
時間：9:30–12:00

問題 1 から問題 4 の 4 問 に解答せよ. 解答用紙は 1 問につき 1 枚とし, 解答した問題番号を明示すること. すべての解答用紙に名前と受験番号 (学籍番号の欄に書け) を書くこと.

問題 1. V を $\mathbb{R}$ 上の無限回微分可能な関数全体のなす $\mathbb{R}$-線形空間とする. $f_1, f_2, f_3, f_4 \in V$ を $f_1(x) = \sin x, f_2(x) = \cos x, f_3(x) = x \sin x, f_4(x) = x \cos x$ $(x \in \mathbb{R})$ により定める. $W \subset V$ を f_1, f_2, f_3, f_4 により生成される部分空間とする. 線形写像 $F\colon V \to V$ を微分 $F(f) = f'$ で定める.

(1) $F(f_1), F(f_2), F(f_3), F(f_4)$ を求めよ.

(2) $F(W) \subset W$ であることを示せ.

(3) f_1, f_2, f_3, f_4 は W の基底であることを示せ.

(4) 線形変換 $F|_W\colon W \to W$ の基底 f_1, f_2, f_3, f_4 に関する表現行列を求めよ.

(5) $F|_W$ が実数の固有値を持たないことを示せ.

問題 2. G を位数 n の有限群とする. $a \in G$ と $b \in G$ について, $a = g^{-1} \cdot b \cdot g$ となる $g \in G$ が存在するとき $a \sim b$ と定め, 二項関係 $\sim$ を定義する.

(1) 二項関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ.

(2) 同値関係 $\sim$ による同値類の個数を m とする. G が可換であるための必要十分条件は, $m = n$ であることを示せ.

(3) $a \in G$ について, $N(a) := \{g \in G \mid a = g^{-1} \cdot a \cdot g\}$ とおく. $N(a)$ は G の部分群であることを示せ.

(4) $[a] := \{b \in G \mid a \sim b\}$ とおく. $[a]$ の元の個数は $G/N(a)$ の元の個数と等しいことを示せ.

(5) n が素数 p の平方と等しいとする. G は可換であることを示せ.

問題 3. 次の問に答えよ.

(1) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$ とおく. 積分値 $\displaystyle\iiint_D \frac{dxdydz}{\{1 + z(x^2 + y^2)\}^2}$ を求めよ.

(2) 実数 $\alpha > 1$ に対して, 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha + 1}\, dx$ は収束することを示せ.

(3) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x, y) = x^2 + 2x \sin y - \sin^2 y$ が極値をとる点をすべて求めよ.

問題 4. 次の問に答えよ.

(1) 集合 X から集合 Y への写像 $f : X \to Y$ がある. X の部分集合 A, B について, 次の命題が正しければ, 証明を与えよ. 正しくないときには, 反例と反例であることの証明を与えよ.

(i) $A \cap B \neq \emptyset$ ならば $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$ である.

(ii) $A \cap B = \emptyset$ ならば $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ である.

(2) $f : (X, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}')$ を位相空間 $(X, \mathcal{O}), (Y, \mathcal{O}')$ の間の写像とする. $f(X) = \{a\}$ を満たす $a \in Y$ が存在するならば, f は連続写像であることを示せ.

(3) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ がハウスドルフ空間であるとする. X の任意の相異なる 3 点 p, q, r に対し, X の開集合 U, V, W で, $p \in U, q \in V, r \in W, U \cap V = \emptyset, V \cap W = \emptyset, W \cap U = \emptyset$ を満たすものが存在することを示せ.

令和 3 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 II

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
2020 年 8 月 20 日
時間：13:00–14:30

問題は問題 A から問題 G までの 7 問ある．これらの問題から任意の 2 問を選んで解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題の記号を明示すること．すべての解答用紙に名前と受験番号 (学籍番号の欄に書け) を書くこと．

問題 A. k を体とし $a, b \in k$ とする．k 上の多項式環 $k[x, y]$ について，次の問に答えよ．

(1) $x-a, y-b$ で生成されるイデアル $(x-a, y-b)$ は $k[x, y]$ の極大イデアルであることを示せ．

(2) イデアル $(x-a, y-b)$ が x^2+y^2-1 で生成されるイデアル (x^2+y^2-1) を含むための必要十分条件は，$a^2+b^2=1$ であることを示せ．

(3) xy, x^2+y^2-1 で生成されるイデアル (xy, x^2+y^2-1) を含む $k[x, y]$ の極大イデアルをすべて求めよ．

問題 B. $\omega = \exp(2\pi i/3) \in \mathbb{C}$ とし，また $\alpha = \sqrt[3]{5} + \omega \in \mathbb{C}$ とおく．

$$F = \mathbb{Q}(\alpha), \quad M = \mathbb{Q}(\omega), \quad L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}\omega)$$

とする．

(1) $F \supset M, F \supset L$ を示せ．

(2) $[F : \mathbb{Q}]$ を求めよ．

(3) α の M 上の最小多項式 $P \in M[X]$ を求めよ．

(4) $F/\mathbb{Q}$, F/L, F/M, $L/\mathbb{Q}$, $M/\mathbb{Q}$ のうち，Galois 拡大であるものをすべて答えよ．答えのみでよい．

(5) α の L 上の最小多項式 $Q \in L[X]$ を求めよ．

問題 C. 次の問に答えよ．

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(u, v) = (u, v, uv)$$

とする．f のガウス曲率と平均曲率を求めよ．

(2) (1) の f に対し，f 上の曲線 $x \mapsto f(\cos x, \sin x)$ $(x \in \mathbb{R})$ の法曲率と測地曲率を求めよ．

(3) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を正則曲面とし，g の単位法線ベクトルを n とする．実定数 t に対して $g_t = g + tn$ とする．g_t が正則な点において，n が g_t の単位法線ベクトルであることを示せ．

(4) (3) の記号の下で g_t は正則とする．g, g_t の単位法線ベクトル n に関する平均曲率をそれぞれ H, H_t とし，g のガウス曲率を K とする．このとき，g_t の臍点でない点で

$$H_t = \frac{H - tK}{1 - 2tH + t^2K}$$

が成り立つことを示せ．

問題 D. 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ から x 軸, y 軸, z 軸を除いた空間を X とおく. すなわち

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y^2+z^2)(x^2+z^2)(x^2+y^2) \neq 0\}.$$

連続写像 $H : X \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ を次で定義する.

$$H((x,y,z),t) = \left((1-t)x + t\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, (1-t)y + t\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, (1-t)z + t\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

(1) $H((x,y,z),t) \in X$ を示せ.

(2) $X \times \{1\}$ への制限写像 $H|_{X\times\{1\}} : X \times \{1\} \to \mathbb{R}^3$ の像を Y とする. 任意の $(x,y,z) \in Y$ と $t \in [0,1]$ について, $H((x,y,z),t) = (x,y,z)$ を示せ.

(3) X の基本群とホモロジー群を求めよ.

問題 E. 複素数 $z = re^{i\theta}$ $\left(0 \leq r,\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$ に対して $f(z) = r^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\theta}{3}}$ とし, $g(z) = \dfrac{f(z)}{z^2+1}$ とおく.

(1) $f(1), f(i), f(-1)$ の値を求めよ.

(2) 上半平面 ($\mathrm{Im}\ z > 0$) における $g(z)$ のすべての極とそこでの留数を求めよ.

(3) 実軸上の積分 $I_1 = \displaystyle\int_0^\infty g(z)dz$ および $I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^0 g(z)dz$ の値を求めよ.

問題 F. 次の問に答えよ.

(1) $x \in (0,\infty)$, $x \neq 1$ とする. 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n}$ を求めよ.

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin(x^n)}{x^n}\,dx$ が存在することを示し, その値を求めよ.

(3) 次を満たす $a, b \in (0,\infty)$ が存在することを示し, a, b の値を求めよ.

$$x \to 0 \text{ のとき} \qquad -\log\frac{\sin x}{x} = ax^2 + bx^4 + O(x^6)$$

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(\log\frac{x^n}{\sin(x^n)}\right)^{1/n} dx$ が存在することを示し, その値を求めよ.

問題 G. `sizeof(int)` の値が 4 である C 言語に関する以下の問に答えよ.

(1) `int` 型の -1 は 2 の補数表現でどのように表現されているか? 16 進数を用いて表せ.

(2) 2 の補数表現による `int` 型の最大の正の数を, 16 進数を用いて書け.

(3) 2 の補数表現について説明せよ.

(4) n 桁の正の 10 進整数 x を `unsigned char a[N]` に `a[0]` は桁数, `a[i]` は i 桁目の数, なる形式で格納する. ただし `N` は n より十分大きいとする. たとえば $x = 12309$ は `a[N]={5,9,0,3,2,1}` と格納する. この数 x を y 倍 ($1 \leq y \leq 9$) する関数を C 言語で書け.