2013/07/26　第3回CSPSAT2研究会

Multi-MaxSATを拡張した Weighted Partial Max-SAT Solver

神戸大学大学院　海事科学研究科
○花田 研太　平山 勝敏

目次

- 研究の背景と目的
- 充足可能性判定問題(SAT問題)
- 最大充足化問題(Max-SAT問題)
- Multi-MaxSAT
- 実験
- 既知の問題
- まとめと今後の課題

目次

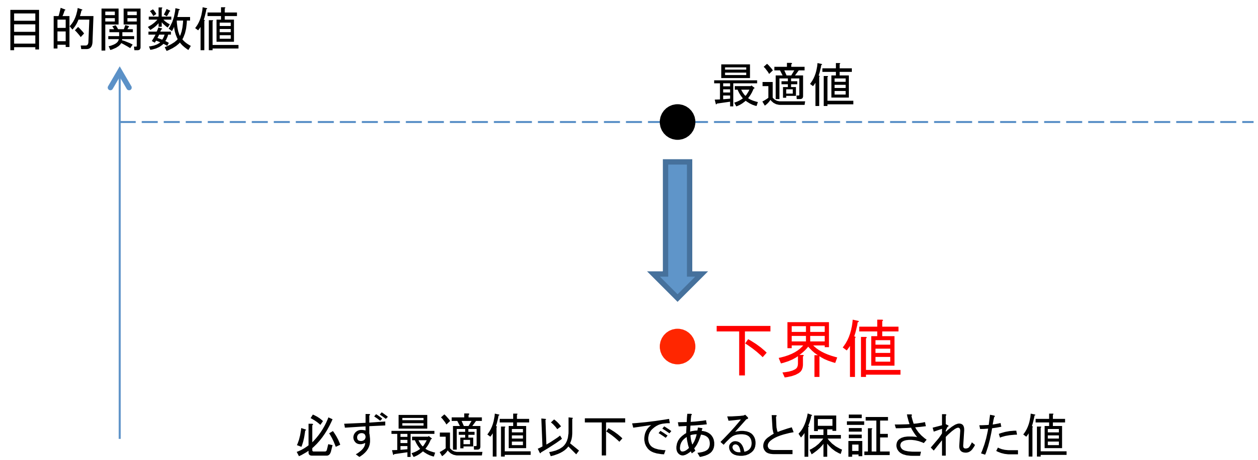
研究の背景と目的

- Max-SAT問題は様々な実用問題に応用されている
  - スケジューリング
  - VLSI設計
  - システム生物学
  - 癌の治療計画

これらの問題に対処するために性能の良いソルバーの開発が必須

研究の背景と目的

- Multi-MaxSATというソルバーに注目
  - 重み付きMax-SAT問題に対するヒューリスティック解法の1つで，原問題に対する下界値を与える
  - 下界値を求めるアルゴリズムは，自然に重み付き部分Max-SAT問題に適用できる



研究の背景と目的

- 下界値の重要性
  - 分枝限定法ベースのソルバーでは，限定操作において下界値がとても重要
  - SATベースで下界値から探索するソルバーでは，良い初期下界値があれば探索空間を削減できる

- 本研究の目的
  - Multi-MaxSATを用いて重み付き部分Max-SAT問題に対するより良い下界値を求める

目次

- 研究の背景と目的
- 充足可能性判定問題(SAT問題)
- 最大充足化問題(Max-SAT問題)
- Multi-MaxSAT
- 実験
- 既知の問題
- まとめと今後の課題

充足可能性判定問題(SAT問題)

- 命題論理式
  - 節の連言で表現するCNFを用いる

論理変数：$x_i \in \{True, False\},\ i \in \{1, 2\}$

リテラル：$x_i, \neg x_i$　（真か偽で表された論理変数）

節：$x_1 \vee \neg x_2$　（リテラルの選言）

命題論理式 φ ：

$$\varphi = \underbrace{\boxed{(\neg x_1)}}_{\text{単位節}} \wedge \underbrace{\boxed{(x_2)}}_{\text{単位節}} \wedge \underbrace{\boxed{(x_1 \vee \neg x_2)}}_{\text{節}} \wedge \underbrace{\boxed{(x_1 \vee x_2)}}_{\text{節}}$$

連言標準形(CNF: Conjunctive Normal Form)

充足可能性判定問題(SAT問題)

- SAT問題 (Satisfiability Problem)
  - CNFの命題論理式を真とするような論理変数の割当てが存在するかどうかを決定する問題

$$\varphi = (\neg x_1) \wedge (x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_2)$$

真偽値表

論理変数		節				命題論理式
x_1	x_2	$\neg x_1$	x_2	$x_1 \vee \neg x_2$	$x_1 \vee x_2$	φ
False	*False*	*True*	*False*	*True*	*False*	*False*
False	*True*	*True*	*True*	*False*	*True*	*False*
True	*False*	*False*	*False*	*True*	*True*	*False*
True	*True*	*False*	*True*	*True*	*True*	*False*

φ を真とするような論理変数の割当ては存在しない → 充足不可能(UNSAT)

目次

- 研究の背景と目的
- 充足可能性判定問題(SAT問題)
- 最大充足化問題(Max-SAT問題)
- Multi-MaxSAT
- 実験
- 既知の問題
- まとめと今後の課題

最大充足化問題(Max-SAT問題)

- 重み付き部分Max-SAT問題
  (Weighted Partial Maximum SAT Problem)
  - 偽の節から発生する重みの総和を最小化する問題

(節，重み)→ $(\neg x_1, 4), (x_2, 2), (x_1 \vee \neg x_2, \infty), (x_1 \vee x_2, \infty)$

真偽値と対応する重み

論理変数		節				命題論理式
x_1	x_2	$\neg x_1$	x_2	$x_1 \vee \neg x_2$	$x_1 \vee x_2$	φ
False	*False*	0	2	0	∞	∞
False	*True*	0	0	∞	0	∞
True	*False*	4	2	0	0	6
True	*True*	4	0	0	0	4

必ず満たさなければならない(重みが ∞)の節をハード節，それ以外をソフト節と呼ぶ

目次

Multi-MaxSAT

- 特徴
  - 0-1整数計画問題からのアプローチ
  - 節集合を分割して解く（ラグランジュ分解）
  - 並列化が可能（ただし，局所同期が必要）
  - 原問題に対する下界値を与える

Multi-MaxSAT

- 0-1整数計画問題による定式化
  - True → 1, False → 0に対応付ける

正のリテラル x_i 　　負のリテラル $1-x_i$

ソフト節 $(\neg x_1, 4) \rightarrow (1-x_1) \geq y_1, \quad \min.\, 4(1-y_1)$

ハード節 $(x_1 \vee \neg x_2, \infty) \rightarrow x_1 + (1-x_2) \geq 1$

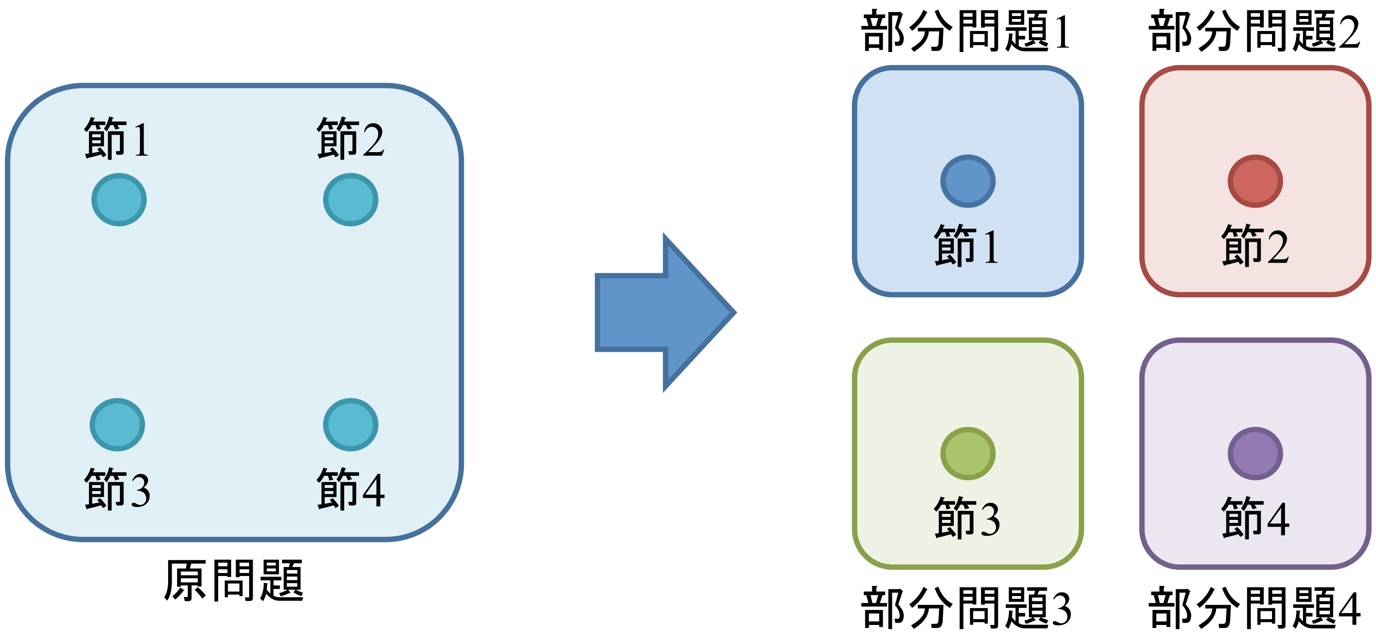
$$(\neg x_1, 4), (x_2, 2), (x_1 \vee \neg x_2, \infty), (x_1 \vee x_2, \infty)$$

⇨

$$\begin{aligned} \min.\ & 4(1-y_1) + 2(1-y_2) \\ \text{s.t.}\ & 1 - x_1 \geq y_1, \\ & x_2 \geq y_2, \\ & x_1 + (1-x_2) \geq 1, \\ & x_1 + x_2 \geq 1. \end{aligned}$$

Multi-MaxSAT

- 節集合分割
  - 原問題を複数の部分問題に分割する
    →節を k $(2 \leq k \leq 4)$ 分割する



$k = 4$の場合

Multi-MaxSAT

- 0-1整数計画問題による定式化
  - 部分問題は固有の決定変数を用いる

決定変数: $x_i^s \in \{0,1\},\ i \in \{1,2\},\ s \in \{1,2,3,4\}$　$y_j \in \{0,1\},\ j \in \{1,2\}$

（部分問題 s の論理変数 i が真なら1，偽なら0）　（節 i が真なら1，偽なら0）

$$Opt = \min.\ 4(1 - y_1) + 2(1 - y_2)$$

$$\text{s.t.}\ \boxed{\begin{aligned} &1 - x_1^1 \geq y_1, \\ &x_2^2 \geq y_2, \end{aligned}}$$

ソフト節

$$\boxed{\begin{aligned} &x_1^3 + (1 - x_2^3) \geq 1, \\ &x_1^4 + x_2^4 \geq 1. \end{aligned}}$$

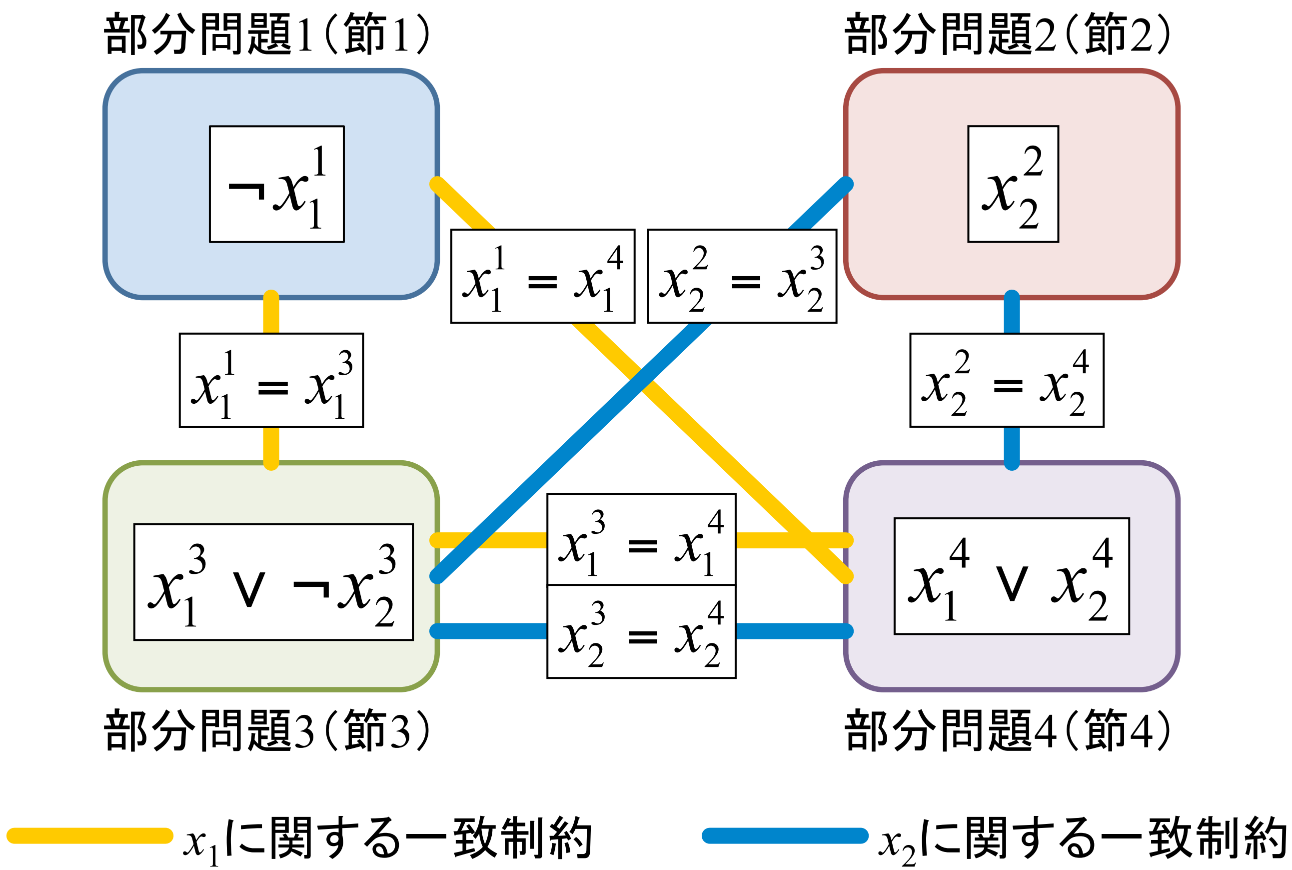
ハード節

$$\boxed{\begin{aligned} &x_1^1 = x_1^3, x_1^1 = x_1^4, x_1^3 = x_1^4, \\ &x_2^2 = x_2^3, x_2^2 = x_2^4, x_2^3 = x_2^4, \end{aligned}}$$

部分問題の変数の値を一致させる
（一致制約）

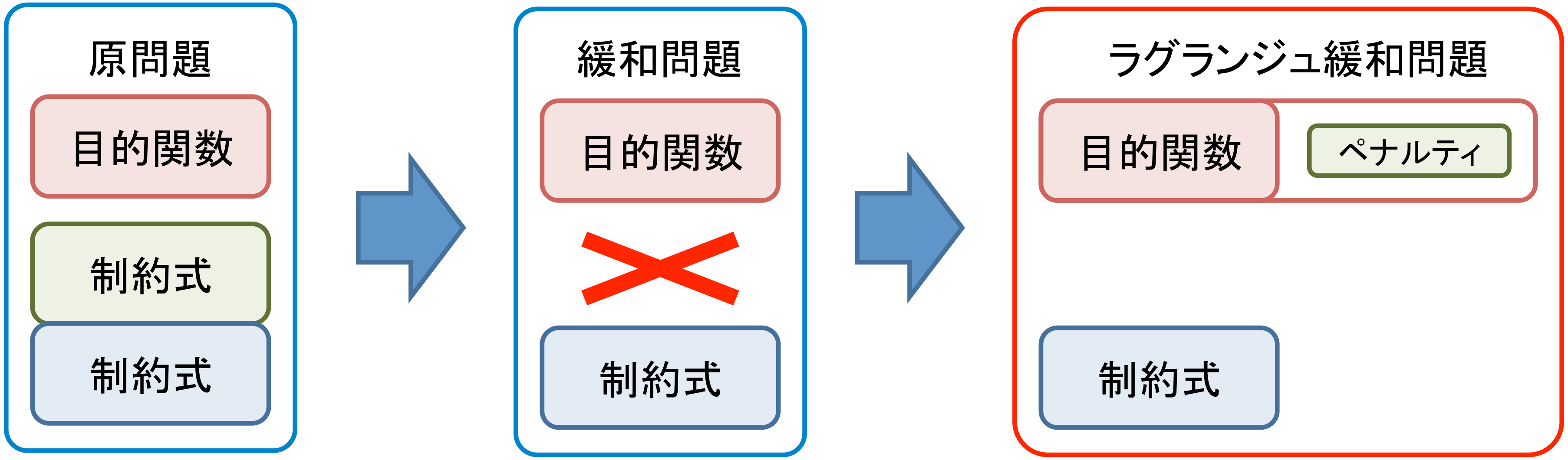
Multi-MaxSAT

- 一致制約
  - 部分問題間に一致制約のネットワークが形成される



Multi-MaxSAT

- ラグランジュ緩和
  - 取り除いた制約式を違反すればペナルティコスト(ラグランジュ乗数)がかかるようにして，下界値を良くする



原問題に対する
下界値を得られる

原問題に対する
より良い下界値を得られる

Multi-MaxSAT

- ラグランジュ緩和
  - 一致制約をラグランジュ緩和

$$L(\mu)=\min.\ 4(1-y_1)+2(1-y_2)$$
$$\boxed{\begin{aligned}&-\mu_1^{(1,3)}\left(x_1^1-x_1^3\right)-\mu_1^{(1,4)}\left(x_1^1-x_1^4\right)-\mu_1^{(3,4)}\left(x_1^3-x_1^4\right)\\&-\mu_2^{(2,3)}\left(x_2^2-x_2^3\right)-\mu_2^{(2,4)}\left(x_2^2-x_2^4\right)-\mu_2^{(3,4)}\left(x_2^3-x_2^4\right)\end{aligned}}$$

ペナルティ項

$$\begin{aligned}\text{s.t. } 1-x_1^1 &\geq y_1,\\ x_2^2 &\geq y_2,\\ x_1^3+\left(1-x_2^3\right) &\geq 1,\\ x_1^4+x_2^4 &\geq 1.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mu_i^{(s,t)}}\in\Re$$

部分問題 s, t 間の一致制約に対する
ラグランジュ乗数

ラグランジュ乗数ベクトル $\mu=\left(\mu_1^{(1,3)},\mu_1^{(1,4)},\mu_1^{(3,4)},\mu_2^{(2,3)},\mu_2^{(2,4)}\ \mu_2^{(3,4)}\right)$

ベクトルのサイズ $d=6$

Multi-MaxSAT

- ラグランジュ分解
  - 部分問題毎に分解

$$L_1(\mu) = \min.\ 4(1 - y_1) + \left(-\mu_1^{(1,3)} - \mu_1^{(1,4)}\right)x_1^1$$
$$\text{s.t. } 1 - x_1^1 \geq y_1.$$

$$L_2(\mu) = \min.\ 2(1 - y_2) + \left(-\mu_2^{(2,3)} - \mu_2^{(2,4)}\right)x_2^2$$
$$\text{s.t. } x_2^2 \geq y_2.$$

$$L_3(\mu) = \min.\ \left(\mu_1^{(1,3)} - \mu_1^{(3,4)}\right)x_1^3 + \left(\mu_2^{(2,3)} - \mu_2^{(3,4)}\right)x_2^3$$
$$\text{s.t. } x_1^3 + \left(1 - x_2^3\right) \geq 1.$$

$$L_4(\mu) = \min.\ \left(\mu_1^{(1,4)} + \mu_1^{(3,4)}\right)x_1^4 + \left(\mu_2^{(2,4)} + \mu_2^{(3,4)}\right)x_2^4$$
$$\text{s.t. } x_1^4 + x_2^4 \geq 1.$$

Multi-MaxSAT

- ラグランジュ分解
  - ハード節しか持っていない部分問題も，重み付き部分Max-SAT問題に帰着する

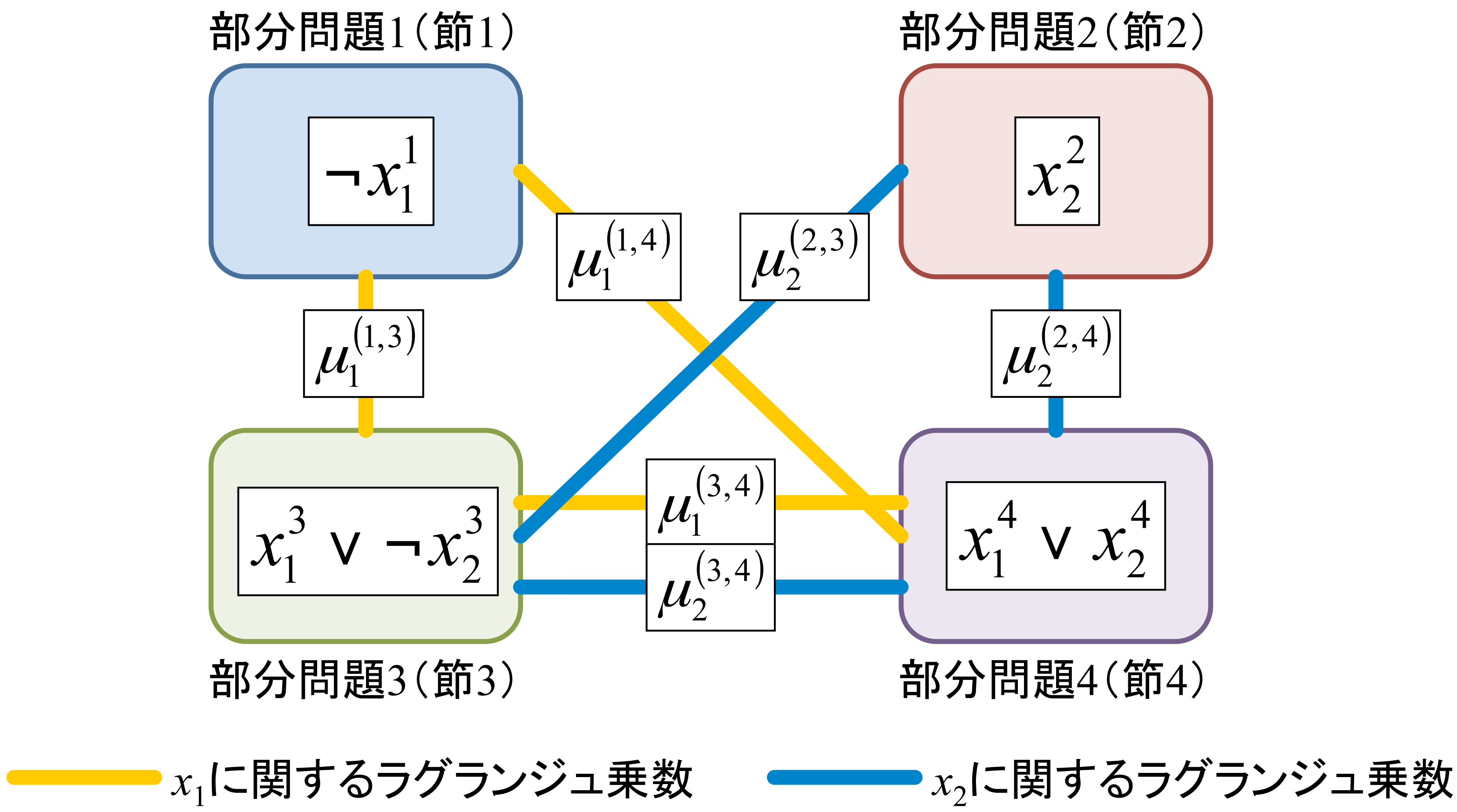
$$
\boxed{\begin{aligned} L_3(\mu) = \min.\ & \left(\mu_1^{(1,3)} - \mu_1^{(3,4)}\right)x_1^3 + \left(\mu_2^{(2,3)} - \mu_2^{(3,4)}\right)x_2^3 \\ \text{s.t.}\ & x_1^3 + \left(1 - x_2^3\right) \ge 1. \end{aligned}}
$$

$$
\Downarrow
$$

$$
\boxed{\begin{aligned} L_3(\mu) = \min.\ & \left(\mu_1^{(1,3)} - \mu_1^{(3,4)}\right)\left(1 - y_1'\right) + \left(\mu_2^{(2,3)} - \mu_2^{(3,4)}\right)\left(1 - y_2'\right) \\ \text{s.t.}\ & x_1^3 + \left(1 - x_2^3\right) \ge 1, \\ & x_1^3 \ge y_1', \\ & x_2^3 \ge y_2'. \end{aligned}}
$$

Multi-MaxSAT

- ラグランジュ分解
  - 一致制約 → ラグランジュ乗数のネットワーク



Multi-MaxSAT

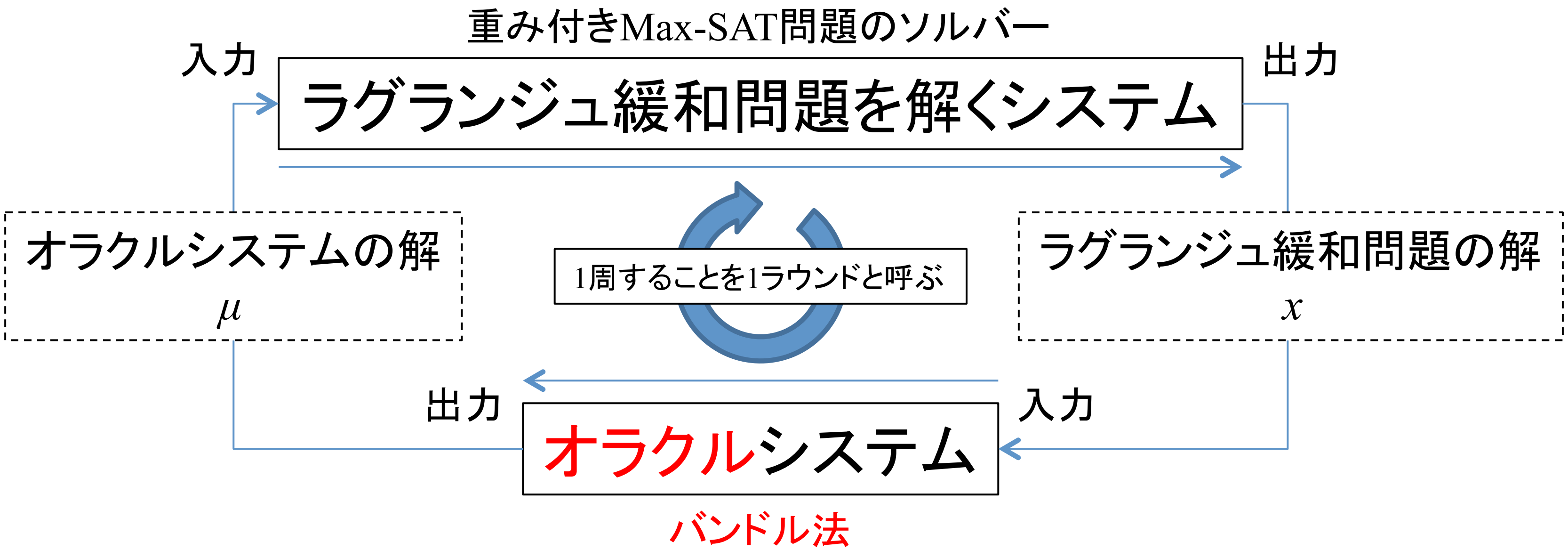
- ラグランジュ双対問題
  - 原問題に対する下界値は，ラグランジュ乗数ベクトル μ によって値が変わる
  - 最も良い下界値を得る問題をラグランジュ双対問題と呼ぶ

$$L(\mu^*) = \max_{\mu}.\, L(\mu)$$

μ^* :ラグランジュ双対問題の最適解

Multi-MaxSAT

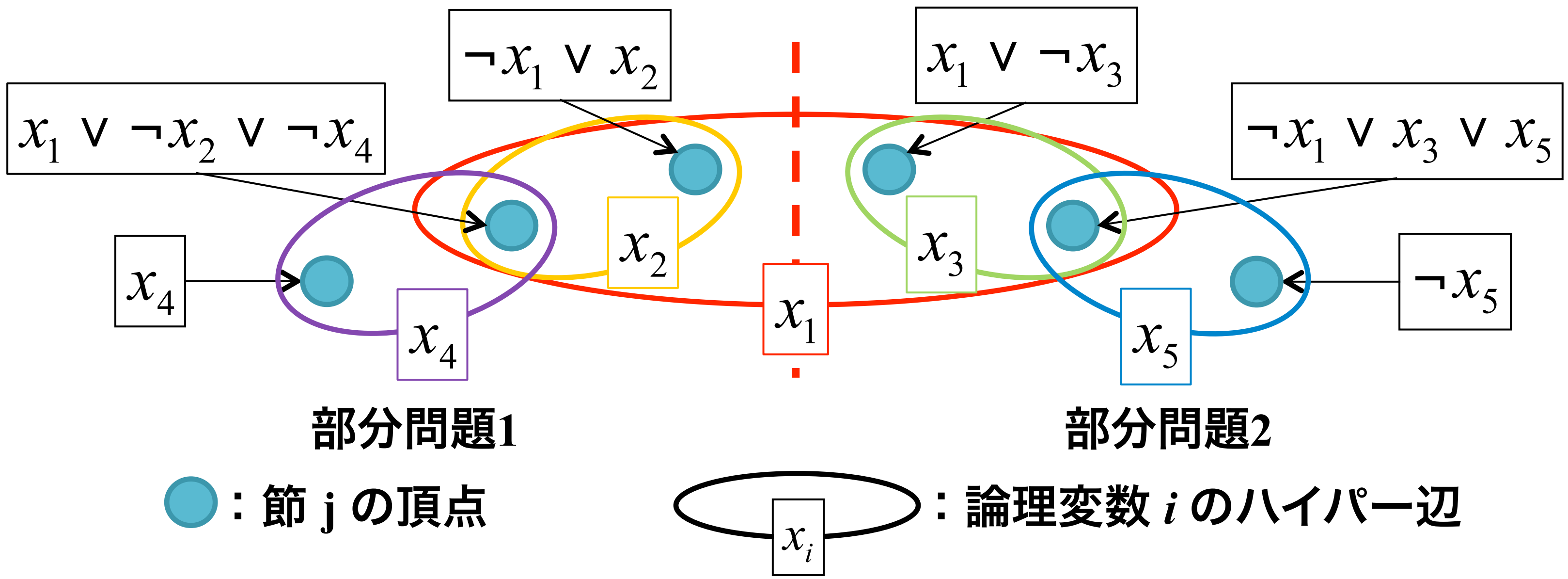
- 下界値を導出するためのアルゴリズム
  - ラグランジュ双対問題の最適解 μ^* を予測(予言)する方法を慣例的に**オラクル**(預言者)と呼ぶ



最適解が求まるまで，もしくは終了条件を満たすまで繰り返す

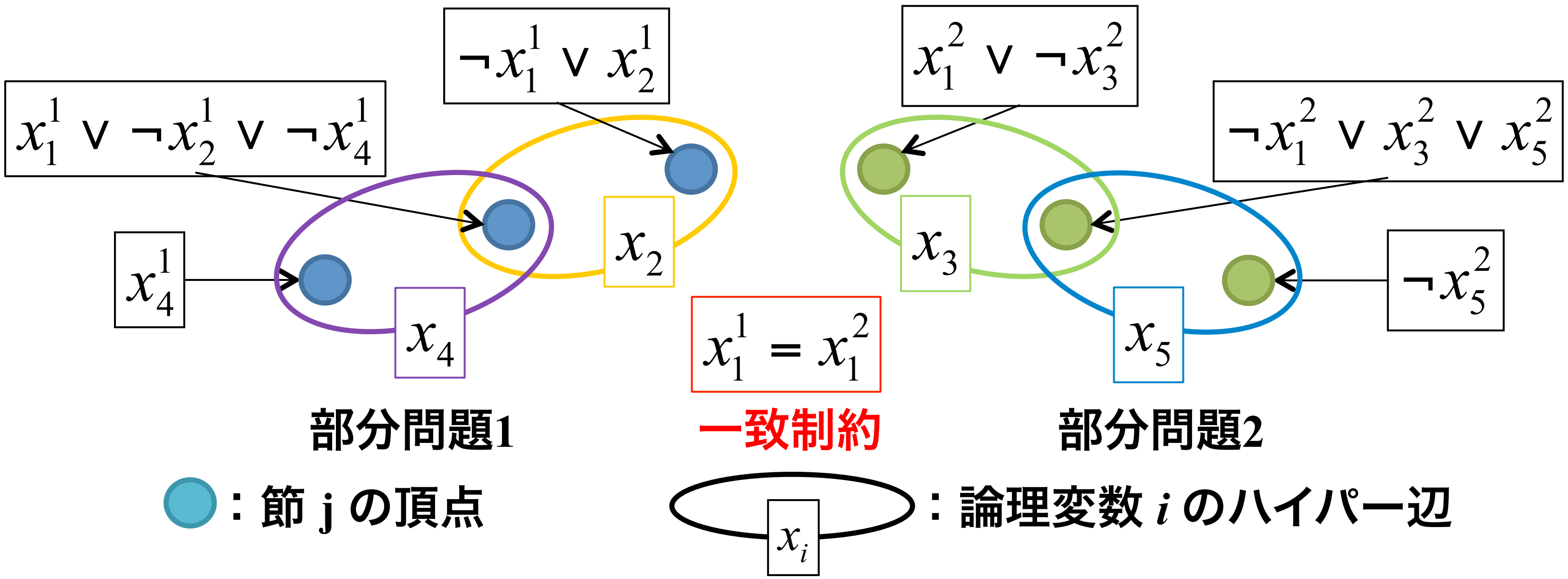
Multi-MaxSAT

- 節集合の分割方法
  - 節を頂点，変数をハイパー辺とみなし，ハイパーグラフ k 分割問題を解く



Multi-MaxSAT

- 節集合の分割方法
  - 節を頂点，変数をハイパー辺とみなし，ハイパーグラフ k 分割問題を解く



Multi-MaxSAT

- 参考：ハイパーグラフ k 分割問題
  - k は所与
  - $k = 2, 3$ の場合，多項式時間で解けることがわかっている
  - $k \geqq 4$ の場合，多項式時間で解けるかどうかは分かっていない
  - ただし，l 一様なハイパーグラフは，多項式時間で解けることが分かっている

福永 拓郎: 全域木詰め込みに基づいたハイパーグラフ分割,
電子情報通信学会技術研究報告. COMP, コンピュテーション, 110(12), 55--62, 2010

目次

実験

- 下界値を導出する既存手法であるMax-SAT ResolutionとMulti-MaxSATを比較
  - 分割数: $k \in \{2,3,4,5,10\}$

- 問題例 : Max-SAT Evaluation 2012
  - Weighted Partial Max-SAT問題
    - ◆Random部門 119問 (Max-2SAT, Max-3SAT)
    - ◆Crafted部門 170問 (auc-path, auc-scheduling)

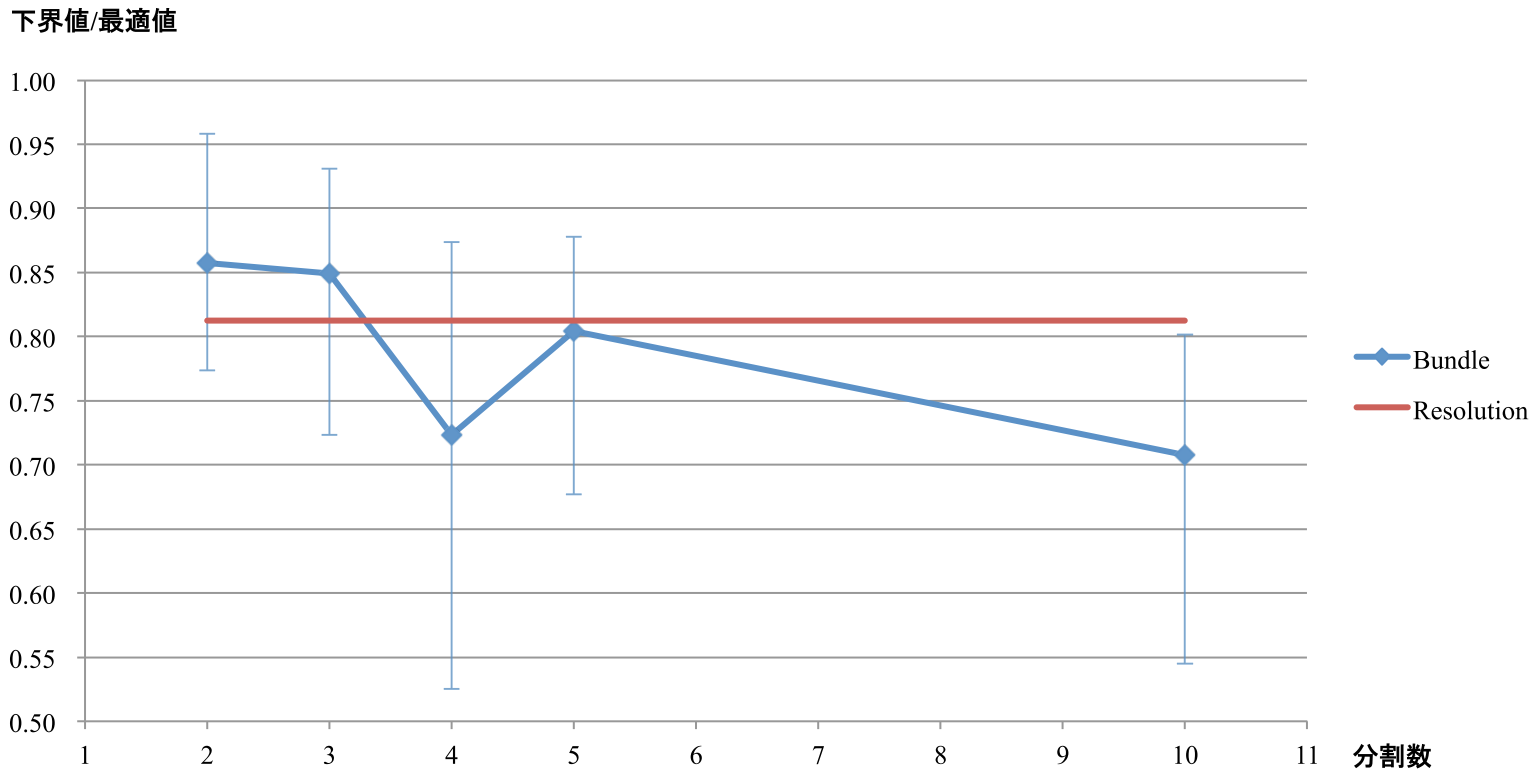
- 評価指標
  - 下界値 / 最適値

実験

- 実験環境
  - CPU : Core i7 2600 (3.4GHz, 4 cores, 8 threads)
  - Memory : 8GB
  - OS : Ubuntu 11.10 (64bit)
  - 言語 : Java 1.6.0_27
  - 部分問題を解くソルバー : akmaxsat
    - Max-SAT Evaluation 2012 WPMax-SAT Random Winner
  - QPソルバー : Cplex 12.4
  - Time out : 5 min (300 sec)

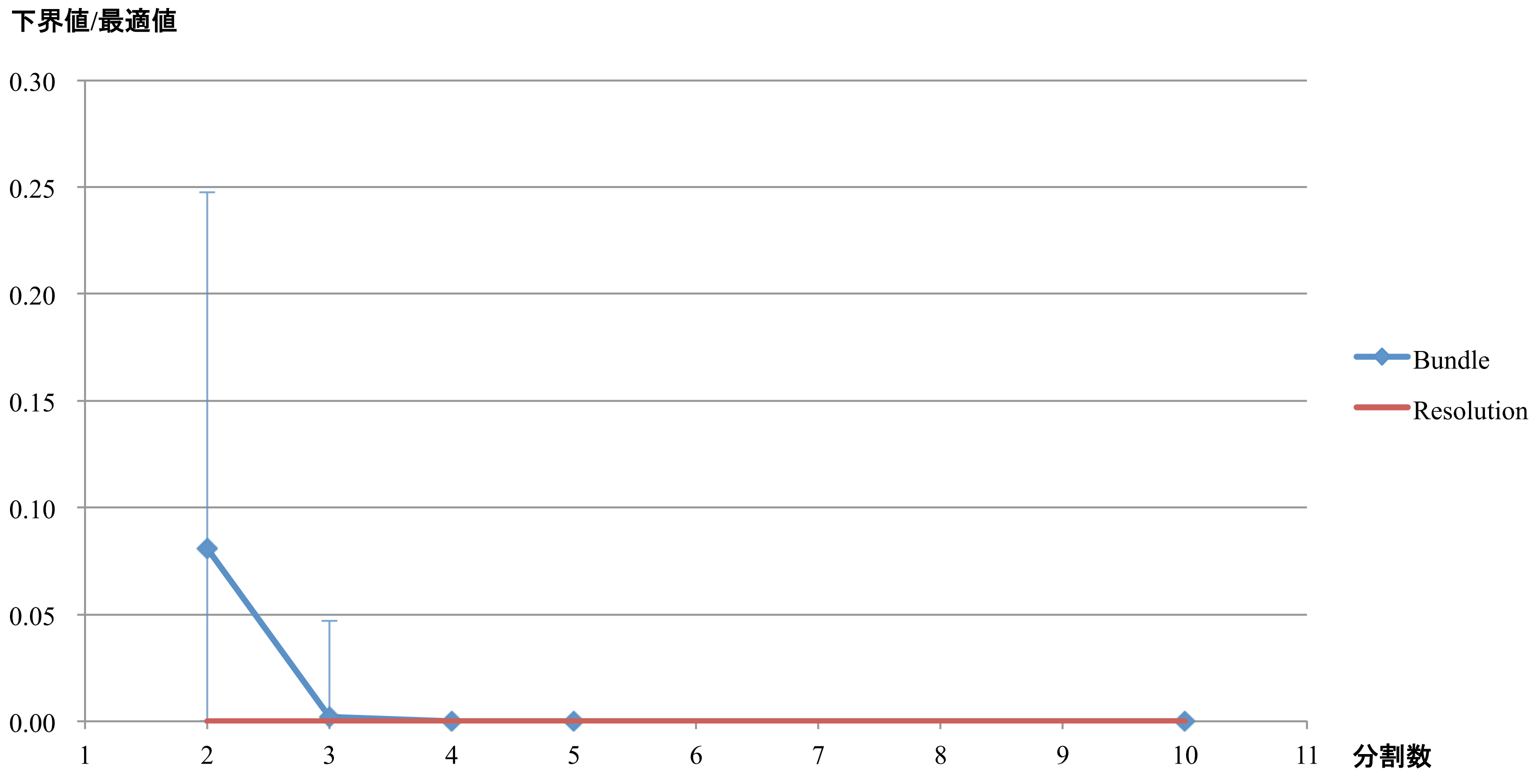
実験

- 実験結果
  - Weighted Partial Max-SAT : Random Max-2SAT



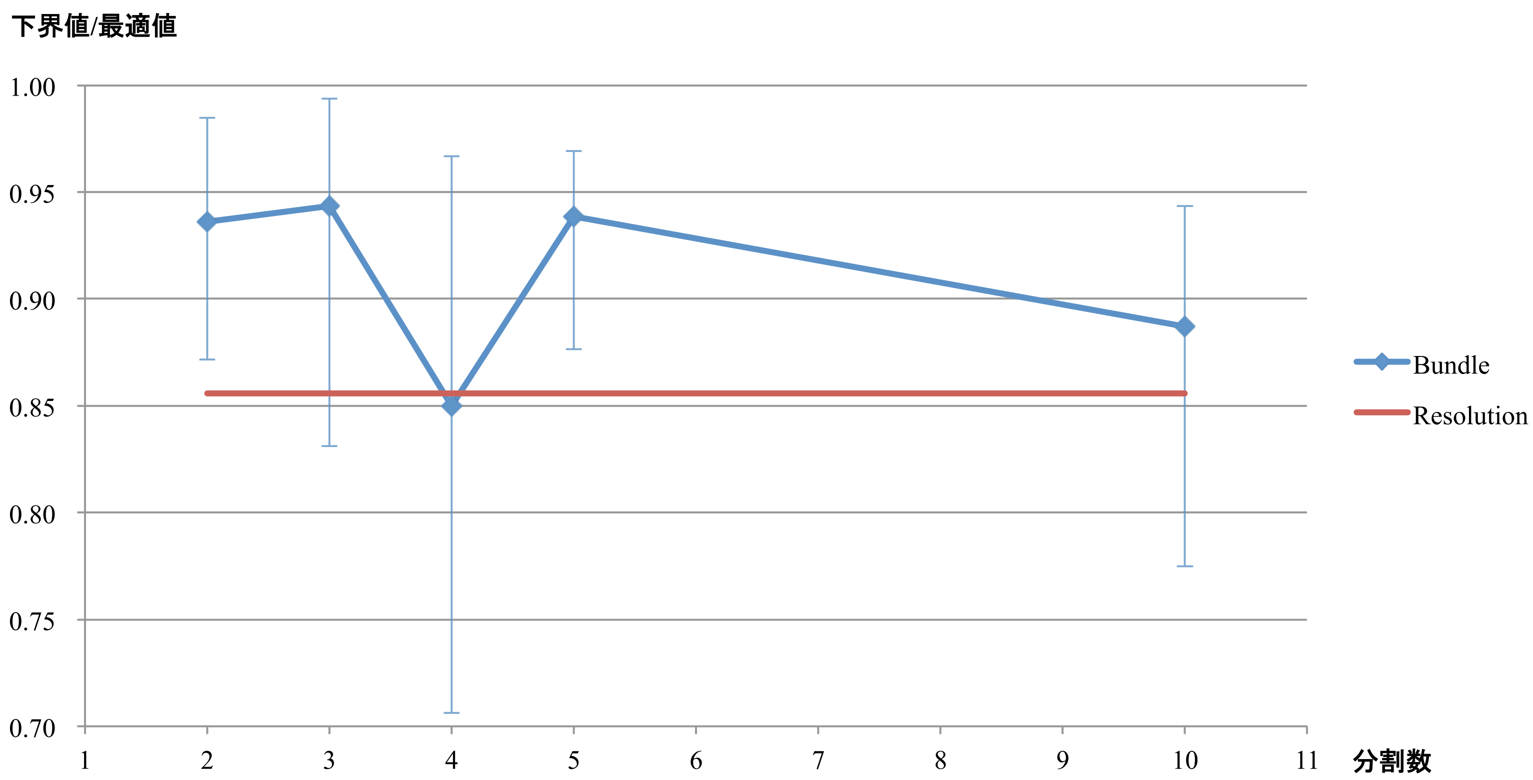
実験

- 実験結果
  - Weighted Partial Max-SAT : Random Max-3SAT



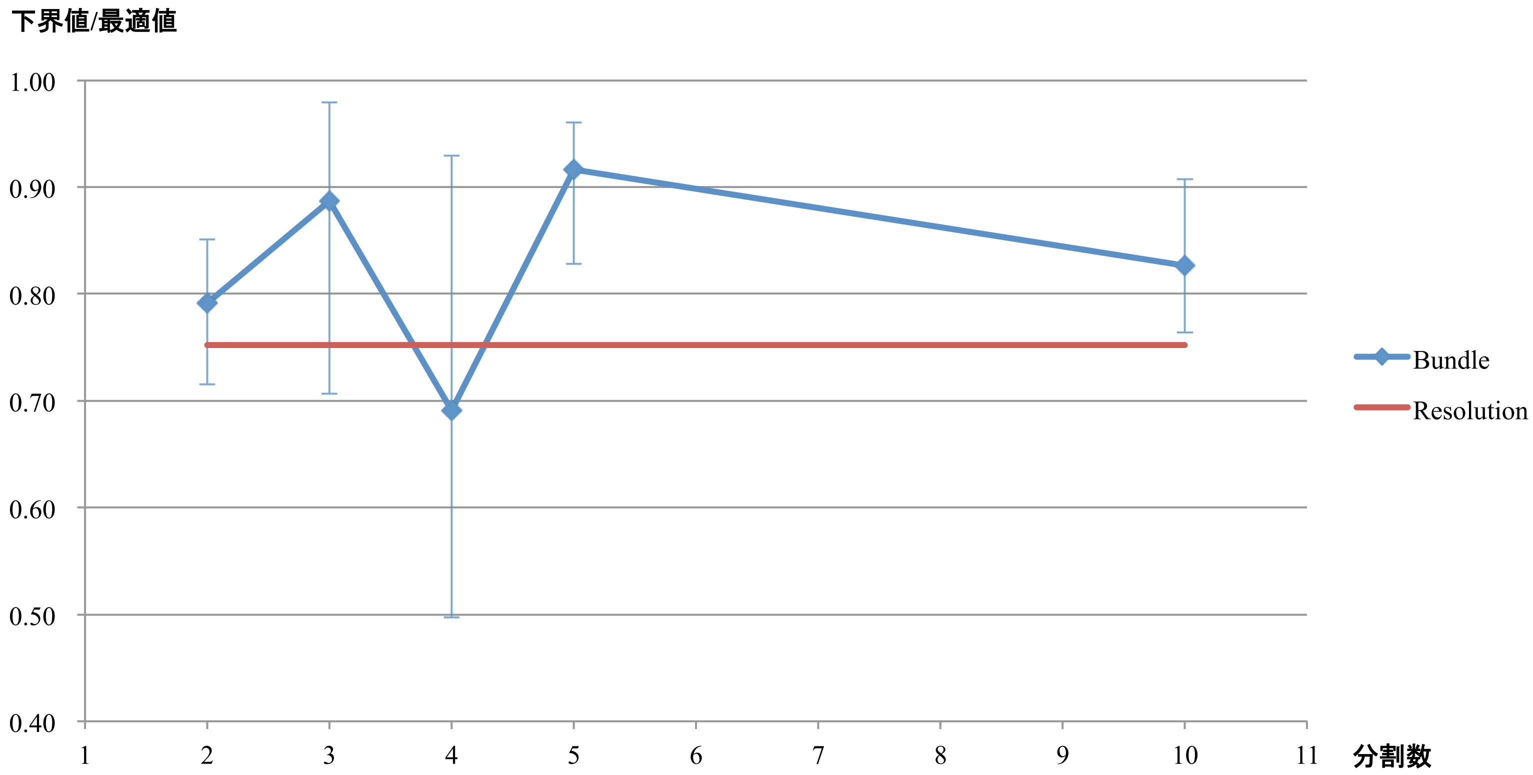
実験

- 実験結果
  - Weighted Partial Max-SAT : Crafted (auc-path)



実験

- 実験結果
  - Weighted Partial Max-SAT : Crafted (auc-scheduling)



目次

既知の問題

- 計算コスト
  - 部分問題を解くのに厳密解法を用いるため，非常に計算コストが高い

- 解決策（案）
  - 部分問題ごとに（Max-SAT ResolutionやSATベースで下界値から探索するソルバーを用いて）下界値を導出し，全ての部分問題の下界値を足せば，全体の問題の下界値になるので計算コストが抑えられる

既知の問題

- Industrial部門の問題例
  - 内部ソルバーにIndustrial部門の問題例に弱いakmaxsatを用いたため，ほとんどタイムアウトしてしまった
- 解決策（案）
  - Industrial部門の問題例に強いソルバー（pwbo等）を用いる
  - マルチスレッドにしてポートフォリオ型に拡張する

既知の問題

- 大規模な問題例の対処
  - 変数が極めて多い問題例は，分割すると大量のラグランジュ乗数を生み出してしまう
  - その結果，部分問題に大量のソフト単位節が発生し，求解速度の低下を招いていると考えられる

- 解決策（案）
  - 多少下界値が悪くなることを覚悟で，ラグランジュ乗数を間引く

目次

- 研究の背景と目的
- 充足可能性判定問題(SAT問題)
- 最大充足化問題(Max-SAT問題)
- Multi-MaxSAT
- 実験
- 既知の問題
- まとめと今後の課題

まとめ

- Multi-MaxSATの下界値を導出するアルゴリズムを重み付き部分Max-SAT問題に適用し，実験的に評価した
- その結果，2分割においては既存手法であるMax-SAT Resolutionよりも良い下界値を得ることができた

今後の課題

- 既知の問題に対処する
- 下界値を導出するSATベースの厳密解法と比較を行う
- 最適値がUNKNOWNな問題例に対して良い下界を導出する
- Multi-MaxSATソルバーを組み込んだ厳密解法を実装し，実験的に評価する
  - 分枝限定法ベース
  - SATベース