1 略解例

問題 1 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ について, AB と BA を求めよ.

[略解例] $AB = \begin{bmatrix} 1\times1+2\times2 & 1\times2+2\times0 & 1\times3+2\times1 \\ 3\times1+(-2)\times2 & 3\times2+(-2)\times0 & 3\times3+(-2)\times1 \\ 1\times1+1\times2 & 1\times2+1\times0 & 1\times3+1\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

$BA = \begin{bmatrix} 1\times1+2\times3+3\times1 & 1\times2+2\times(-2)+3\times1 \\ 2\times1+0\times3+1\times1 & 2\times2+0\times(-2)+1\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

問題 2 行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} i & j \\ l & m \end{bmatrix}$ について,

$$(AB)C = A(BC) \ (\underline{\text{結合法則}}),$$
$$A(B+C) = AB + AC, \quad (A+B)C = AC + BC \ (\underline{\text{分配法則}})$$

が成り立つことを確かめよ.

[略解例] $AB = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$ から $(AB)C = \begin{bmatrix} (ae+bg)i+(af+bh)l & (ae+bg)j+(af+bh)m \\ (ce+dg)i+(cf+dh)l & (ce+dg)j+(cf+dh)m \end{bmatrix}$.

$BC = \begin{bmatrix} ei+fl & ej+fm \\ gi+hl & gj+hm \end{bmatrix}$ から $A(BC) = \begin{bmatrix} a(ei+fl)+b(gi+hl) & a(ej+fm)+b(gj+hm) \\ c(ei+fl)+d(gi+hl) & c(ej+fm)+d(gj+hm) \end{bmatrix}$.

$(ae+bg)i+(af+bh)l = a(ei+fl)+b(gi+hl), (ae+bg)j+(af+bh)m = a(ej+fm)+b(gj+hm),$
$(ce+dg)i+(cf+dh)l = c(ei+fl)+d(gi+hl), (ce+dg)j+(cf+dh)m = c(ej+fm)+d(gj+hm)$
から $(AB)C = A(BC)$.

$B+C = \begin{bmatrix} e+i & f+j \\ g+l & h+m \end{bmatrix}$ から $A(B+C) = \begin{bmatrix} a(e+i)+b(g+l) & a(f+j)+b(h+m) \\ c(e+i)+d(g+l) & c(f+j)+d(h+m) \end{bmatrix}$.

$AC = \begin{bmatrix} ai+bl & aj+bm \\ ci+dl & cj+dm \end{bmatrix}$ から $AB+AC = \begin{bmatrix} (ae+bg)+(ai+bl) & (af+bh)+(aj+bm) \\ (ce+dg)+(ci+dl) & (cf+dh)+(cj+dm) \end{bmatrix}$.

$a(e+i)+b(g+l) = (ae+bg)+(ai+bl), a(f+j)+b(h+m) = (af+bh)+(aj+bm),$
$c(e+i)+d(g+l) = (ce+dg)+(ci+dl), c(f+j)+d(h+m) = (cf+dh)+(cj+dm)$
から $A(B+C) = AB + AC$.

$A+B = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$ から $(A+B)C = \begin{bmatrix} (a+e)i+(b+f)l & (a+e)j+(b+f)m \\ (c+g)i+(d+h)l & (c+g)j+(d+h)m \end{bmatrix}$.

$$AC+BC=\begin{bmatrix}(ai+bl)+(ei+fl) & (aj+bm)+(ej+fm)\\ (ci+dl)+(gi+hl) & (cj+dm)+(gj+hm)\end{bmatrix}.$$

$(a+e)i+(b+f)l=(ai+bl)+(ei+fl), (a+e)j+(b+f)m=(aj+bm)+(ej+fm),$
$(c+g)i+(d+h)l=(ci+dl)+(gi+hl), (c+g)j+(d+h)m=(cj+dm)+(gj+hm)$
から $(A+B)C=AC+BC$.

問題 3 行列 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, O=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ について, 次の式が成り立つことを確かめよ.

$$AE=EA=A,$$
$$AO=OA=O.$$

E, O はそれぞれ２次正方行列の 単位行列, 零行列 という. 数演算の $1, 0$ に相当する.
３次正方行列の単位行列, 零行列はどのようなものになるか考えよ.

[略解例] $AE=\begin{bmatrix}a\times 1+b\times 0 & a\times 0+b\times 1\\ c\times 1+d\times 0 & c\times 0+d\times 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=A,$

$$EA=\begin{bmatrix}1\times a+0\times c & 1\times b+0\times d\\ 0\times a+1\times c & 0\times b+1\times d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=A.$$

$$AO=\begin{bmatrix}a\times 0+b\times 0 & a\times 0+b\times 0\\ c\times 0+d\times 0 & c\times 0+d\times 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=O,$$

$$OA=\begin{bmatrix}0\times a+0\times c & 0\times b+0\times d\\ 0\times a+0\times c & 0\times b+0\times d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=O.$$

３次正方行列の単位行列, 零行列はそれぞれ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ と考えられる.

問題 4 行列 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} x & 1 \\ -2 & y \end{bmatrix}$ について, $AB=O$ が成り立つような x, y の値を求めよ.

[略解例] $AB=\begin{bmatrix}x-4 & 1+2y\\ 2x-8 & 2+4y\end{bmatrix}$ と $AB=O$ から $x-4=0, 1+2y=0, 2x-8=0, 2+4y=0.$

これを解いて, $x=4, y=-\frac{1}{2}$ を得る.

問題 5 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ について, $AB = BA = E$ が成り立つことを確かめよ.

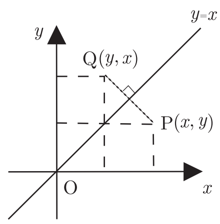
[略解例] $AB = \begin{bmatrix} 1 \times (-5) + 2 \times 3 & 1 \times 2 + 2 \times (-1) \\ 3 \times (-5) + 5 \times 3 & 3 \times 2 + 5 \times (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E,$

$BA = \begin{bmatrix} (-5) \times 1 + 2 \times 3 & (-5) \times 2 + 2 \times 5 \\ 3 \times 1 + (-1) \times 3 & 3 \times 2 + (-1) \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$

問題 6 y 軸に関する折り返しを行列を用いた１次変換で表せ.

[略解例] (x, y) を y 軸に関して折り返して (x', y') が得られるとすると, $x' = -x, y' = y$ である. これを行列で表すと, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ である.

問題 7 右の図を参考にして, 直線 $y = x$ に関する対称移動を行列を用いた１次変換で表せ.

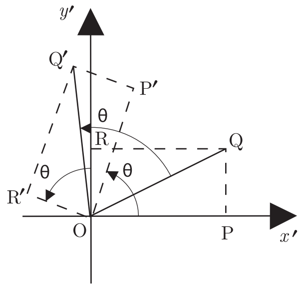


[略解例] $y = x$ と直交し $\mathrm{P}(a, b)$ を通る直線の方程式は $y - b = -(x - a)$ であるので, 2 直線の交点は $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$ である. $\mathrm{P}(a, b)$ の像を $\mathrm{P}'(a', b')$ とすると, P, P$'$ の中点 $(\frac{a+a'}{2} \frac{a+a'}{2})$ が $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$ に一致する.

つまり $a' = b, b' = a$ が得られる.

これを行列で表すと, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ である.

問題 8 (1)　右の図で, Q の座標を (x, y) としたとき,
P' の座標は $(x\cos\theta, x\sin\theta)$, R' の座標は
$(-y\sin\theta, y\cos\theta)$ であることを確認せよ.
また, Q' の座標を x, y, θ で表せ.



(2)　Q' の座標を (x', y') としたとき, 上で挙げた式
$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$
が成り立つことを確認せよ.

[略解例] (1, 2) Q の座標を (x, y) としたとき, x 軸への射影 $\mathrm{P}(x, 0)$, y 軸への射影 $\mathrm{R}(0, y)$ を θ 回転すると,
$\mathrm{P}'(x\cos\theta, x\sin\theta)$, $\mathrm{Q}'(y\cos(\theta + \frac{\pi}{2}), y\sin(\theta + \frac{\pi}{2})) = (-y\sin\theta, y\cos\theta)$ が得られる.
$\overrightarrow{\mathrm{OP}'} + \overrightarrow{\mathrm{OR}'} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}'}$ から $\mathrm{R}'(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ である.

問題 9 原点のまわりの次の角の回転移動を表す行列を求めよ. また, その回転により点 $(3, 2)$ はどの点に移るか.

(1)　$30°$　　(2)　$120°$　　(3)　$90°$　　(4)　$-45°$

[解答例] 問題 8 から原点のまわりの次の角の回転移動を表す行列は $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ で与えられる.

(1) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$.　$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1 \\ \frac{3}{2} + \sqrt{3} \end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.　$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1 \end{bmatrix}$.

(3) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.　$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(4) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$.　$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$.

問題 10 (1)　原点のまわりの $90°$ の回転移動と $45°$ の回転移動を続けて行う１次変換は, 原点のまわりの $135°$ の回転移動と同じであることを示せ.

(2)　原点のまわり角 α の回転移動と β の回転移動の合成は角 $\alpha+\beta$ の回転移動になることから, 次の関係式を導け.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

[略解例] (1) 原点のまわりの $90°$ の回転移動をした後でさらに $45°$ の回転移動を続けて行うと, 原点のまわりの $90°+45°=135°$ の回転移動になる.

(2) １次変換の合成を行列で行うと,

$$\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{bmatrix}.$$

これが $\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix}$ と一致するので, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ が得られる.

問題 11　１次変換 $f:\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ に対し,

(1)　O$(0,0)$,P$(1,0)$,Q$(0,1)$,R$(1,1)$ の像を求めよ.

(2)　OPRQ の像を求めよ.

[略解例] (1) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 7\end{bmatrix}$.

(2) OPRQ 内の点 (x,y) は $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ をみたす.

$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ から (x,y) の像 (x',y') は $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}$ をみたす.

４点 $(0,0),(1,2),(2,5),(3,7)$ を頂点とする平行四辺形にうつる.

問題 12 行列 $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{bmatrix}$ と $\overrightarrow{v}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{w}=\begin{bmatrix}s\\ t\end{bmatrix}$, 実数 α,β で, 線型性が成り立つことを確かめよ.

[略解例] $\alpha\overrightarrow{v}+\beta\overrightarrow{w}=\begin{bmatrix}\alpha x+\beta s\\ \alpha y+\beta t\end{bmatrix}$ から $A(\alpha\overrightarrow{v}+\beta\overrightarrow{w})=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha x+\beta s\\ \alpha y+\beta t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(\alpha x+\beta s)-3(\alpha y+\beta t)\\ -3(\alpha x+\beta s)+5(\alpha y+\beta t)\end{bmatrix}$.

$A\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-3y \\ -3x+5y \end{bmatrix}$, $A\overrightarrow{w} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s-3t \\ -3s+5t \end{bmatrix}$ から
$\alpha A\overrightarrow{v} + \beta A\overrightarrow{w} = \alpha \begin{bmatrix} 2x-3y \\ -3x+5y \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2s-3t \\ -3s+5t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(2x-3y)+\beta(2s-3t) \\ \alpha(-3x+5y)+\beta(-3s+5t) \end{bmatrix}$.
$2(\alpha x+\beta s)-3(\alpha y+\beta t) = \alpha(2x-3y)+\beta(2s-3t), -3(\alpha x+\beta s)+5(\alpha y+\beta t) = \alpha(-3x+5y)+\beta(-3s+5t)$
から $A(\alpha\overrightarrow{v}+\beta\overrightarrow{w}) = \alpha A(\overrightarrow{v}) + \beta A(\overrightarrow{w})$.

問題 13 行列 $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ で表される 1 次写像 f について, 次の直線または領域の f による像を求めよ.

(1) 直線 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2) $(0,0), (1,0), (1,2), (0,2)$ で囲まれた領域

[略解例] (1) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$.

像は直線 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ である. 直線の方程式は, $\dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-4}{4} = \dfrac{z-6}{4}$ で与えられる.

(2) $(0,0), (1,0), (1,2), (0,2)$ で囲まれた領域 の点 (x,y) は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \ (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$$

で表される.

$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$(0,0,0), (-1,0,2), (2,4,2), (3,4,0)$ で囲まれた領域にうつる.