1 行列の計算

問題 1 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ について, AB と BA を求めよ.

問題 2 行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} i & j \\ l & m \end{bmatrix}$ について,

$$\begin{aligned} &(AB)C = A(BC) \ (\underline{\text{結合法則}}), \\ &A(B+C) = AB + AC, \quad (A+B)C = AC + BC \ (\underline{\text{分配法則}}) \end{aligned}$$

が成り立つことを確かめよ.

問題 3 行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ について, 次の式が成り立つことを確かめよ.

$$\begin{aligned} &AE = EA = A, \\ &AO = OA = O. \end{aligned}$$

E, O をそれぞれ 2 次正方行列の <u>単位行列</u>, <u>零行列</u> という. 数演算の $1, 0$ に相当する.
3次正方行列の単位行列, 零行列はどのようなものになるか考えよ.

問題 4 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x & 1 \\ -2 & y \end{bmatrix}$ について, $AB = O$ が成り立つような x, y の値を求めよ.

O でない正方行列 A に対し, ある $B \neq O$ をとって $AB = O$ または $BA = O$ になるとき, A を <u>零因子</u> という.

問題 5 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ について, $AB = BA = E$ が成り立つことを確かめよ.
このとき, B を A の <u>逆行列</u> といい, $B = A^{-1}$ と表す. また, A は B の逆行列にもなっている. したがって $A = B^{-1}$ と表せる.

2　座標平面上の点の移動と１次変換

1. 原点 O を基準とする座標平面上の点 (x, y) の位置ベクトルを $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ で表す.
点 (x, y) を点 (x', y') に移す移動が, a, b, c, d を定数として

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

と表されるとき, この移動を <u>１次変換</u> といい, 行列を用いて次のように表す.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

１次変換を f, g などの記号を用いて次のように表すこともある.

$$\overrightarrow{v'} = A\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{v}) \quad \text{ただし,}\ \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

2. 平面から平面への１次変換は, 平面を $\mathbb{R}^2$ と書いて, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ などと表される. １次変換を続けて行うとき, <u>合成変換</u> という.

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$$

これを $g \circ f$ と書き, $\overrightarrow{v'} = g \circ f(\overrightarrow{v})$ と表す.

１次変換 f, g の行列による表示をそれぞれ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

とすると, 合成変換 $g \circ f$ は

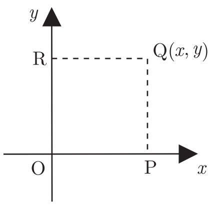
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる. 合成変換 $g \circ f$ に対応する行列は行列の積 $\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ と一致する.

3. １次変換の例

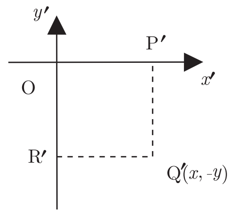
(1) $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ これは x 軸に関する折り返しである.

これを行列を用いて表すと, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.



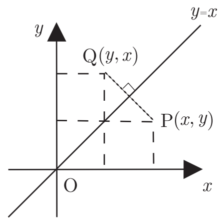
x 軸に関する折り返し

行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ による１次変換



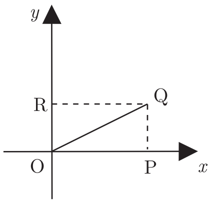
問題 6 y 軸に関する折り返しを行列を用いた１次変換で表せ.

問題 7 右の図を参考にして, 直線 $y = x$ に関する対称移動を行列を用いた１次変換で表せ.



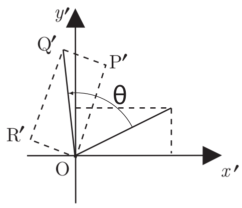
(2) $\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$ これは原点のまわりの角 θ の回転移動である.

これを行列を用いて表すと, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

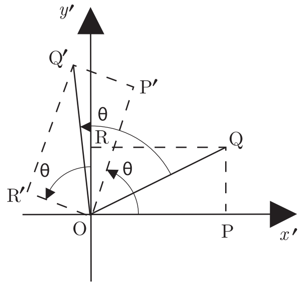


原点のまわりの角 θ の回転

行列 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ による１次変換



問題 8 (1)　右の図で, Q の座標を (x,y) としたとき, P' の座標は $(x\cos\theta, x\sin\theta)$, R' の座標は $(-y\sin\theta, y\cos\theta)$ であることを確認せよ. また, Q' の座標を x, y, θ で表せ.



(2)　Q' の座標を (x', y') としたとき, 上で挙げた式

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

が成り立つことを確認せよ.

問題 9 原点のまわりの次の角の回転移動を表す行列を求めよ. また, その回転により点 $(3,2)$ はどの点に移るか.

(1)　30°　　(2)　120°　　(3)　90°　　(4)　-45°

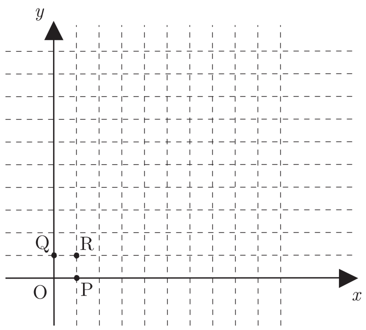
問題 10 (1)　原点のまわりの 90° の回転移動と 45° の回転移動を続けて行う 1 次変換は, 原点のまわりの 135° の回転移動と同じであることを示せ.

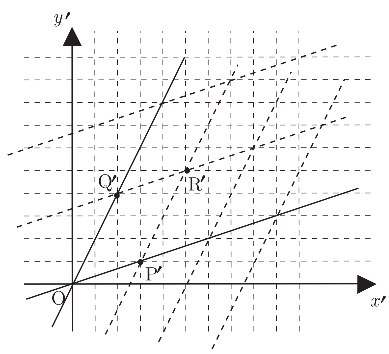
(2)　原点のまわり角 α の回転移動と β の回転移動の合成は角 $\alpha+\beta$ の回転移動になることから, 次の関係式を導け.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

3　1 次変換による平面の像

1.　行列 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ で表される 1 次変換によって, 点 $\mathrm{P}(x,0)$ は点 $\mathrm{P}'(3x,x)$ に, 点 $\mathrm{Q}(0,y)$ は点 $\mathrm{Q}'(2y,4y)$ に, 点 $\mathrm{R}(x,y)$ は点 $\mathrm{R}'(3x+2y, x+4y)$ に移る.





次のように捉えると, 理解しやすい.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = x\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

すなわち

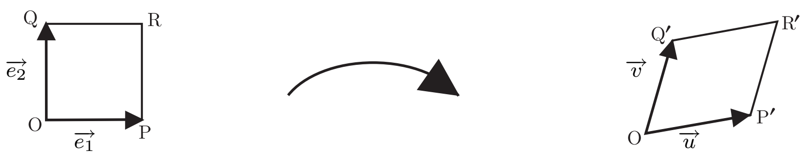
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

へと移る.
一般に,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}.$$

領域 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ は $\overrightarrow{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を２辺とする正方形である.

$\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ について, $\overrightarrow{u} \not\parallel \overrightarrow{v}$ のとき, １次変換により $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ を２辺とする平行四辺形に移る. $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$ のときは直線に移る.



１次変換を f としたとき, 点 P に対し $f(\mathrm{P})$ を P の 像 という.

問題 11　行列 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ で表される１次変換 f に対して,

(1)　$\mathrm{O}(0,0)$,$\mathrm{P}(1,0)$,$\mathrm{Q}(0,1)$,$\mathrm{R}(1,1)$ の像を求めよ.

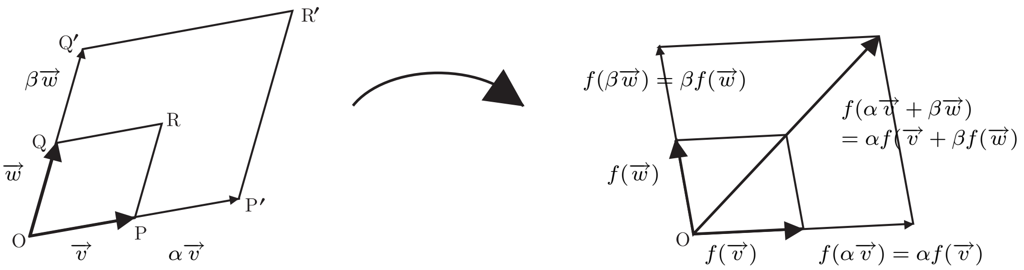
(2)　正方形 OPRQ の像を求めよ.

4　１次変換の性質

1. 原点は原点に移る.
2. 線型性
   f を１次変換とすると $f(\alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w}) = \alpha f(\overrightarrow{v}) + \beta f(\overrightarrow{w})$,　ただし α, β は実数
   １次変換の線型性は, １次変換 f を行列 A で言い換えると,

$$A(\alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w}) = \alpha A\overrightarrow{v} + \beta A\overrightarrow{w}$$

である. 性質１は性質２の線型性に含まれる.



問題 12 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ とベクトル $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{w} = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$, および実数 α, β に対して, 線型性 $A(\alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w}) = \alpha A\overrightarrow{v} + \beta A\overrightarrow{w}$ が成り立つことを確かめよ.

3. 1次変換の像

(a) 直線は直線に移る.

例：行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ で表される $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への1次変換 f による直線 $l : 2x + y = 3$ の像は次のようにして求められる.

l 上の点を $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2t+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ とパラメータ表示すると,

$$\begin{aligned} A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= A\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} t + A\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\frac{y-12}{-5} = \frac{x-6}{-3}.$$

$\therefore$ 直線 $y = \frac{5}{3}x + 2$ に移る.

(b) 平面上の平行四辺形の領域は平行四辺形の領域に移る.（ただし, 特別なケースで直線に移る場合もある.）

5 一般化

平面 $\mathbb{R}^2$ 上の点は 2 次の列ベクトルで表せた．より一般に実数を成分とする n 次列ベクトル全体を $\mathbb{R}^n$ と書く：

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| \, x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

$n = 3$ なら $\mathbb{R}^3$ は（3 次元）座標空間を表わしている．$m \times n$ 行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

と列ベクトル

$$\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \overrightarrow{w} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

に対し

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & \overrightarrow{v} & \mapsto & \overrightarrow{w} = A\overrightarrow{v} \end{array}$$

で与えられる対応 f を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への <u>1 次写像</u> という．

例：行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への 1 次写像を定める．

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

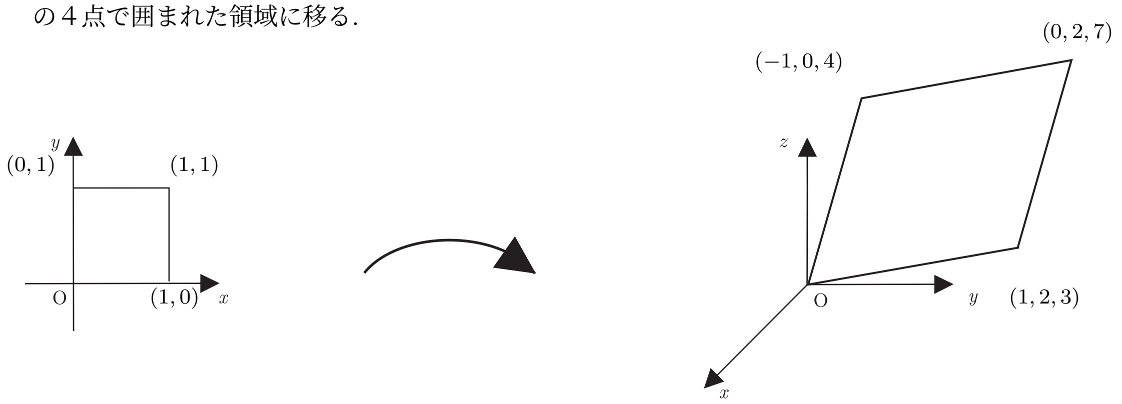
であるから，$\mathbb{R}^2$ 全体は原点を通りベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ を含む平面に移る．この平面は $8y_1 - 7y_2 + 2y_3 = 0$ で与えられる．

また $(0,0),(0,1),(1,1),(1,0)$ で囲まれた領域の像は

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

の４点で囲まれた領域に移る.



問題 13 行列 $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ で表される１次写像 f について, 次の直線または領域の f による像を求めよ.

(1) 直線 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}t+\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(2) $(0,0),(1,0),(1,2),(0,2)$ で囲まれた領域.