数理統計学　自習用教材

第1章　確率，確率変数

1．1．　「確率」とは？

例えばサイコロを1回振る試行を考えましょう。

(A)　「1から6のいずれかの目が出る」という事象の生じる「確率」は1である.
(B)　「1か2の目が出る」という事象の生じる「確率」は,「出目が1」と「出目が2」の生じる「確率」の和になる.

これらに違和感を感じる人は少ないのではないでしょうか？「確率」の定義は，これらの自然な感覚を定式化するものであってほしい.
　そこでまず，サイコロの出目の全体を

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

と見なしましょう．すると個別の事象はΩの部分集合と見なされます．例えば，**根元事象**「出目が1」「出目が2」や，それらの**和事象**は

$$B_1 = \{1\},\ B_2 = \{2\},\ B_1 \cup B_2 = \{1,2\}$$

と見なされます．事象Aの生じる「確率」を$P(A)$とおくと，(A)と(B)はそれぞれ

(A) $P(\Omega) = 1$
(B) $P(B_1 \cup B_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = P(B_1) + P(B_2)$

と定式化されます.
　さて,「確率」の種々の定義のうち，最もしっかりしているのは次の**公理的確率**です.

定義 1.1（公理的確率）．各事象に0以上1以下の実数を対応させる写像Pは，次の条件を満たすとき**（公理的）確率**と呼ばれる.
(1)　$P(\Omega) = 1$
(2) **互いに素**な事象$A_1, A_2, \ldots$（任意の$i \neq j$について$A_i \cap A_j = \emptyset$を満たす事象$A_1, A_2, \ldots$）を勝手に一組とる．このとき

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n). \qquad (1.1)$$

ただし

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n := \left\{\omega \in \Omega \mid \text{ある}n\text{について}\omega \in A_n\right\}.$$

例題 1.1（制限時間 6 分） 表の出る確率が$0 < p < 1$のコインを何回も振って，n回目にはじめて裏が出る事象をA_nとおきます. 次の確率を計算しなさい.（解答例は 1.4 節にあります）

(1) $P(A_n)$

(2) $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$

１．２．　確率の基本的な性質

確率の諸性質のうち，統計やデータ解析に必要になるものの多くは直観的に明らかです．しかし，それらを確率の定義に基づいてきちんと理解するのは案外難しいです.

命題 1.1.　集合Ω上の確率Pについて次が成り立つ.

(1) **互いに素な**（相排反な）m個（有限個）の事象$A_1, A_2, \dots, A_m$について

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_m) = \sum_{n=1}^{m} P(A_n). \tag{1.2}$$

特に事象Aに対して$A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$（$A$の**余事象**）とおくと，

$$P(A) + P(A^c) = 1. \tag{1.3}$$

(2) 事象A_1, A_2について次が成り立つ.

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \qquad \textbf{（加法公式）}$$

<u>**命題 1.1（1）の証明**</u>　$A_1, A_2, \dots, A_m$を互いに素な事象とし，$A_{m+1} = A_{m+2} = \cdots = \emptyset$とおきます．$P(\emptyset) = 0$に注意すると，確率の定義条件(2)式より，

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{m} P(A_n)$$

となって，(1.2)式が示されました．特に $A_1 = A$，$A_2 = A^c$，$A_n = \emptyset$（$n \geq 3$）とおくと(1.3)式が得られます.

<u>**命題 1.1 (2）の証明**</u>　各自チェック！　□

確率の基本的な性質にざっと目を通しておきたい人は[稲垣 2014]を参照するとよいでしょう.

１．３．標本調査，サンプリング，確率変数

コロナ禍が明けた現在，某業界の人達を対象に外出時にマスクを着用するかしないか，エチケットマスクのアンケートを実施したいとしましょう．最も単純な方法は調査対象全員（**母集団**）にアンケートをとる**全数調査**ですが，時間的なコスト，人的なコストなど様々なコストがかかります．ここは母集団から**サンプル**をランダムに抽出，そこからデータをとって母集団の特性をつかもうとする**標本調査**が妥当でしょう．サンプル抽出に**無作為性**は欠かせません．サンプルを特定の企業の人に制限したり，特定のサークルのメンバーに制限したりしてしまうと，サンプルどうしの回答が影響を及ぼし合い，不公平が生じてしまうからです．

図 1.1 は，母集団（調査対象者全員）からn個のサンプルを抽出する様子を描いたものです．データをとる前，これらのサンプルを，母集団の背後にある神様のルール（確率）に従って値をとる変数と見なす ― これが統計学の古典的な思想です．アンケートの例だと，i番目のサンプルX_iは，ある確率pで YES（マスクを着用すべき），ある確率$1-p$で NO（マスクを着用しなくてもよい）と回答するはずだと考えることになります．定式的には，YES を「1」，NO を「0」と見なして，

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{確率}p\text{で YES} \\ 0 & \text{確率 }1-p\text{で NO} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

を考えることになります．このように，データをとる前，確率を伴って実数値を返す「変数」を**確率変数（random variable）**と呼びます．確率変数は，頭文字の「r」と「v」を使って，r.v.と略記することが多いです．

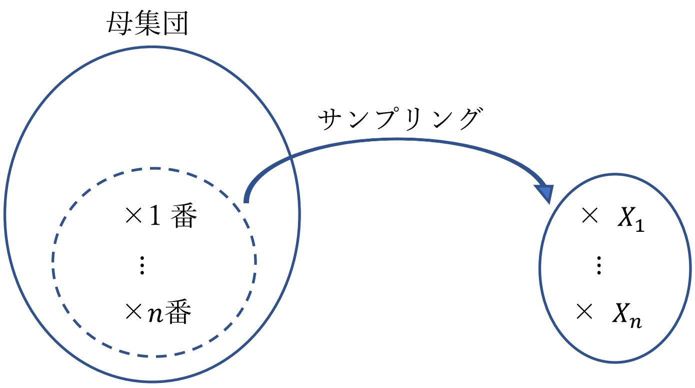


図 1.1

例 1.1. 一つのサイコロの出目をXとおくと，Xは

$$P(X = i) = \frac{1}{6} \qquad (i = 1, \dots, 6)$$

で定義される確率変数と見なされます．いまの場合，$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$であって，例えば$A_1 =$

$\{1,3,5\}$は「奇数の目が出る」という事象を表します．このとき

$$P(X \in A_1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

が成り立ちます．一般に，任意の事象Aに対して

$$P(X \in A) = \sum_{a \in A} P(X = a) \tag{1.4}$$

が成り立ちます．

定義 1.2. 有限個または可算無限個の値$x_1, x_2, \dots$をとる確率変数Xを**離散(型)確率変数**と呼ぶ.

注1.1. （重要） 例 1.1 で見たように，離散確率変数のもっとも重要な性質は

$$\text{任意の事象}A\text{について}\ P(X \in A) = \sum_{a \in A} P(X = a) \tag{1.5}$$

です．事象Aに確率 $P(X \in A)$を対応させる写像は**確率分布**と呼ばれます．確率分布は確率変数（サンプル）の振舞いを記述するものであり，極めて重要です．(1.5)式の右辺は，確率分布が個々の$P(X = x_i)$の和の分解されることを主張しています．x_iに$P(X = x_i)$を対応させる写像は，私達にとって馴染みのある 1 変数関数（**確率関数**）ですから，確率分布そのものよりも扱いやすいのです．

では確率分布は常に確率関数の和で表されるのでしょうか？残念ながらそうではありません．先の講義で扱う連続型確率変数については(1.5)式は成り立たなくなるのです．

１．４．例題の解答例

例題 1.1 の解答例

(1) $P(A_n) = p^{n-1}(1-p)$

(2)$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} P(A_m) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} p^{m-1}(1-p) = \lim_{n\to\infty} (1-p^n) = 1$

(2)の左辺は「コイントスの回数が限りなく多いときにどこかで裏が出る」という事象を表しています．$1-p>0$であることを思い出すと，永遠に表が出続けるわけはないですね？(2)の結果は，いつかは裏が出るという当たり前のことを言っているだけなのです．

１．５．章末問題

問題 A-1-1　$P(\emptyset)=0$であることを示しなさい．（$\emptyset$を**空事象**と呼ぶ）．

問題 C-1-1　一時期，すべての人に PCR 検査を実施すべき派とそうでない派がメディアで激論を交わしていました．PCR 検査とはどのような検査方法なのかを調べ，すべての人に PCR 検査を実施することの意義やリスクについて，付録 A の「ベイズの定理」を用いて論じなさい．

本章の内容の一部は，文献[稲垣 2014]の第 1 章・第 2 章を参照しています．

参考文献

[稲垣 2014] 稲垣 宣生，山根 芳知，吉田 光雄 著．統計学入門．裳華房．2014.

第２章　期待値

２．１．　母集団の特性の代用物

標本調査は，母集団から無作為にサンプルを選び，そこからデータを採取する調査の手法であり，**母平均**や**母分散**などの母集団の特性（**母数**）の真値を知ることはできません．そこで，母数の代用物として，サンプルの関数（**推定量**）を導入します．例えば母平均の代用物であれば，**標本平均**と呼ばれる推定量を採用するのが通例です．なぜ標本平均なのか？それは，**不偏性**と呼ばれる「良い」性質をもっているからです．不偏性をはじめ，統計的な「良さ」の尺度のほとんどは確率変数の**期待値**の言葉で定式化されます．

本章では，期待値の概念を与えた後，関連する初等的な性質をいくつか紹介します．

２．２．　期待値

以下，Xを離散型確率変数として，とり得る値を$x_1, x_2, \ldots$とおきます．

定義 2.1.（期待値）． 確率変数Xの一変数関数$f(X)$に対して，

$$\sum_i f(x_i)P(X = x_i) \tag{2.1}$$

で定められる量を$\boldsymbol{f(X)}$**の期待値**と呼び，$E[f(X)]$と表します．

次で定める母平均，母分散，母標準偏差は統計的に特に重要です．

定義 2.2.（母平均，母分散，母標準偏差）．

(1) [母平均]

$$E[X] = \sum_i x_i P(X = x_i) \tag{2.2}$$

μ_Xという表記が使われることもあります．

(2) [母分散]

$$E[(X - \mu_X)^2] = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 P(X = x_i) \tag{2.3}$$

σ_X^2や$V[X]$などの表記が使われることもあります．

(3) [母標準偏差]

$$\sqrt{V[X]} = \sqrt{E[(X - \mu_X)^2]} \tag{2.4}$$

例題 2.1（制限時間 6 分） サイコロを振ったときの出目をXとおくとき，母平均μ_Xと母分散σ_X^2をそれぞれ求めなさい．（解答例は 2.4 節にあります）

命題 2.1. （離散型の)確率変数Xと実数a, bについて次式が成り立つ．

$$E[aX+b] = aE[X]+b.$$

証明. Σの線形性より，

$$（左辺） = E[aX+b] = \sum_i (ax_i + b)P(X = x_i)$$

$$= a\sum_i x_i P(X=x_i) + b\sum_i P(X=x_i) = a\sum_i x_i P(X=x_i) + b = aE[X]+b = \left(右辺\right).$$

ここで，最後から 2 つ目の等号では，

$$\sum_i P(X = x_i) = 1 \tag{2.5}$$

となる事実を使いました．□

例題 2.2（制限時間 8 分） （1）$0<p<1$について確率関数を

$$P(X=k) = p^k(1-p)^{1-k}, \qquad k=0,1$$

で定めるとき，Xは**ベルヌーイ分布に従う**と呼びます．母平均と母分散をそれぞれパラメータpで表しなさい．（章末問題 B-2-3 はこの話の自然な一般化になっています）

（2）$E[e^X] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}E[X^n]$が成り立つことを確かめなさい．

例題 2.3（二項分布）（制限時間 6 分） $0<p\leq 1$について確率関数が

$$P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \qquad k=0,1,\ldots,n$$

で定義されるとき，Xは**二項分布$B(n,p)$に従う**と呼び，$X\sim B(n,p)$と表します．ただし，$\binom{n}{k}$はn個のものからk個を選ぶ選び方の総数を表す二項係数です．$X\sim B(n,p)$のとき，(1)μ(母平均)，(2)σ^2(母分散)をそれぞれ求めなさい．（μ_X, σ_X^2の下付き添え字Xを割愛することもあります）．

余力がある人は例題 2.3 の一般化を試みましょう．例えば，「一般の$E[(X-\mu_X)^k]$(**k次モーメント**)はどうなっているのかな」とか，そういうことです．平均，母分散以外のモーメントの統計的意義を問うてみるのもよいでしょう（文献[稲垣 2014]参照）．

２．３．章末問題

問題 A-2-1（例題 2.3 の一般化）　$X \sim B(n, p)$とする．任意の自然数kに対してk次モーメント$E[(X-\mu_X)^k]$を求めよ．

問題 B-2-1　Xが（離散型）確率変数，a, bが実数のとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$V[aX+b] = a^2 V[X] \tag{2.6}$$

問題 B-2-2　母分散$V[X]$について次の問いに答えなさい．

(1) $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$（**分散公式**）が成り立つことを示しなさい．

(2) $V[X]$の値を(1)の公式を用いて求めることの数値計算的な意義について論じなさい．

２．４．例題の解答例

例題 2.1 の解答例

(1) $\mu_X = \sum_{i=1}^{6} iP(X=i) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i = 3.5.$

(2) $\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{6}(i-3.5)^2 P(X=i) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(i-3.5)^2 = \frac{35}{12}.$

例題 2.2 の解答例

(1) $\mu_X = 1 \times p^1(1-p)^0 + 0 \times p^0(1-p)^1 = p,$

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= (1-\mu_X)^2 \times p^1(1-p)^0 + (0-\mu_X)^2 \times p^0(1-p)^1 = (1-p)^2 p + p^2(1-p) \\ &= (1-p)p\{(1-p)+p\} = (1-p)p.\end{aligned}$$

(2) Xが恒等的に 0 であるような場合は除外する（0^0は困る）．$a_n = \frac{X^n}{n!}$とおくと，

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{X}{n+1}\right| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

d'Alembert（ダランベール）の収束判定法より，$\sum_n \frac{1}{n!}X^n$は（絶対）収束します．ゆえに

$$\begin{aligned}E[e^X] = E\left[\sum_n \frac{1}{n!}X^n\right] &= \sum_i \sum_n \frac{1}{n!}x_i^n P(X=x_i) \\ &= \sum_n \frac{1}{n!}\sum_i x_i^n P(X=x_i) = \sum_n \frac{1}{n!}E[X^n].\end{aligned}$$

例題 2.3 の解答例　　略

参考文献

[稲垣 2014]　稲垣 宣生，山根 芳知，吉田 光雄 著．統計学入門．裳華房．2014.

第３章　連続型確率変数

３．１．　「正確」に測る？

例えば自分の持ち物（例えばスマホ）の幅を測りたいとしましょう．いわゆる市販の定規でも「正確」な長さがわかります．しかし，それはあくまで mm よりも細かい単位を無視した近似値であって，真値μではありません．仮に小数点以下をどこまでも精度良く測定できる「神の定規」があったとしても，私達人間の能力ではそれを読み取ることができません．

n回測定するとき，i回目の測定X_iは，確率誤差ϵ_i（**誤差確率変数**）を伴って，

$$X_i = \mu + \epsilon_i, \qquad i = 1, \dots, n \tag{3.1}$$

とモデル化されます．サイコロを転がす思考とは異なり，μは実数値をとります．ここに誤差が加わって，X_iは実数値をとり得る「連続的」な確率変数と見なされます．

３．２．　連続型確率変数

定義 3.1.（連続型確率変数）． 確率変数Xは，次の条件を満たす非負値関数$f_X(x)$（**確率密度関数**）が存在するとき，**連続型である**という．

(1) 任意の$a < b$について $\mathrm{P}(X \in [a, b]) = \int_a^b f_X(x)dx$.

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$.

注 3.1.　Xが連続型確率変数のとき，

$$P(X = x) = \lim_{\epsilon \to 0} P(x \le X \le x + \epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_x^{x+\epsilon} f_X(t)\,dt = 0 \tag{3.2}$$

なので，確率関数$P(X = x)$は恒等的に 0 です．連続型の場合，離散型の場合（(1.5)式）のように確率分布を確率関数の計算に帰着させるのは難しそうです．

３．３．　連続型確率変数の例

最初の例はプログラミング言語の疑似乱数の生成アルゴリズムなどに応用されています．

例 3.1.（一様分布）. 確率密度関数が

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x < b \\ 0 & x < a \ \text{ or } \ b \le x \end{cases} \tag{3.3}$$

で与えられるとき（図 3.1），確率変数Xは**一様分布$\boldsymbol{U(a,b)}$に従う**と呼ばれます．このとき$X \sim U(a,b)$と表します．

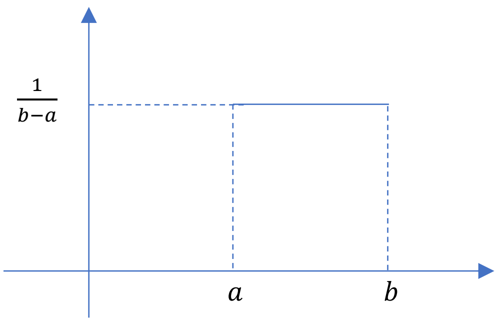


図 3.1

いまの場合，確率分布は

$$P(c \le X \le d) = \frac{1}{b-a}\int_c^d dx, \quad a \le c < d \le b \tag{3.4}$$

次式で定まります（注 3.2 参照）．

注 3.2. 確率分布は，事象Aに確率値$P(X \in A)$を対応させる写像のことでした（第 1 回講義ノート参照）. 実は，この確率分布は，任意の区間$[c,d]$に対して確率$P(c \le X \le d)$（(3.4)式）を見ることと等価になります．このこと厳密に理解するには，測度論という抽象数学を学ばなければなりません．測度論の最初の砦は「事象とは何か？」という問いです．一般に，全事象Ωの部分集合の族Σは，条件

(i) $\Sigma \neq \emptyset$

(ii) $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$

(iii) 任意の$A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$に対して$\bigcup_i A_i \in \Sigma$

を満たすとき，**完全加法族**と呼ばれていて，このΣの各要素を「事象」と呼びます．特に連続型の場合，区間の和集合や補集合をかき集めたものが事象の集合になるのです．測度論をさらに深掘りしたい人はネットや[西尾 1978]で参照してみてください．

次の連続型確率変数の例は指数分布です．

例 3.2.（指数分布）. 実数$\lambda > 0$に対して，確率密度関数が

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0 \tag{3.5}$$

で与えられるとき（図 3.2），確率変数Xは**指数分布$\mathbf{Exp}(\boldsymbol{\lambda})$に従う**と呼ばれ，$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$と表記されます．

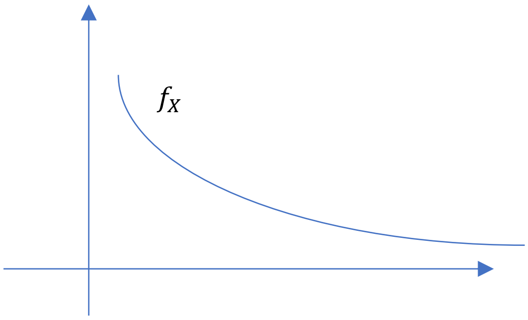


図 3.2

指数分布の重要な性質の一つに「無記憶性」があります．つまり，任意の正数s,tに対して

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t) \tag{3.6}$$

が成り立ちます（各自チェック！）．無記憶性とは，（例えば）特定の個体の残りの寿命がこれまでの生存時間と無関係に分布することを主張するものです．無記憶性をもつ確率分布として幾何分布なども有名です（文献[稲垣 2014]）．

例題 3.1（制限時間 7 分）$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$のとき，(3.6)式が成り立つことを確かめよ．

国政上需要な選挙のとき，マスコミが特番を組んだり選挙結果の速報を流している様子を目にします．そのとき，たった数%の開票率であるにも関わらず特定の候補者の当選確実がアナウンスされることがあります．なぜでしょうか？ここには次の正規分布が深く関与しています．

例 3.3.（正規分布）． 実数μ, σ^2に対して，確率密度関数が

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty \tag{3.7}$$

で与えられるとき，確率変数Xは**正規分布$N(\mu, \sigma^2)$に従う**と呼ばれ，$X \sim N(\mu, \sigma^2)$と表します．特に$\mu = 0, \sigma^2 = 1$の正規分布を**標準正規分布**と呼びます．標準正規分布の密度関数は図 3.3 のようなy軸対称な釣鐘型になります．

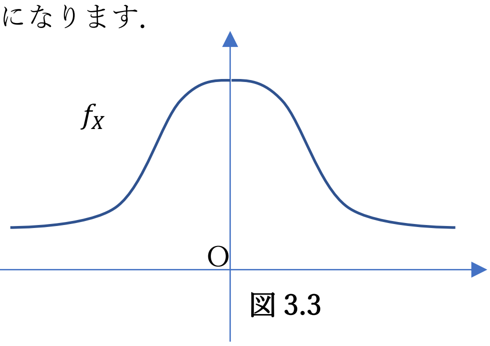


図 3.3

正規分布は「分布の王様」と称されるくらいあらゆるところに登場する確率分布で，**区間推定**や**仮説検定**などのデータ解析の手法において重要な役割を果たします（詳細については後日学習予定）．以下では標準正規分布の確率計算の簡単な方法を見ておきます．

例題 3.2（制限時間 6 分）$X \sim N(0, 1^2)$とします．標準正規分布表（付表 1）の数値の読み方を考えて，次の確率を求めなさい．表のz_αを標準正規分布の**両側α点**あるいは**両側$z_\alpha 100\alpha\%$点**と呼びます．

(1) $P(0 \le X \le 1.96)$　　(2) $P(0 < X \le 1.96)$　　(3) $P(|X| \le 1.96)$

３．４．　期待値

ここでは連続型確率変数に対して期待値を定義し，その統計的意味が離散と連続で変わらないことを見ます．

定義 3.2.（期待値）． 連続型確率変数Xの一変数関数$g(X)$について，

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

を$g(X)$の**期待値**と呼びます．

定義 3.3.（母平均，母分散，母標準偏差）．

(1) 母平均．

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \tag{3.8}$$

μ_Xという表記が使われることもあります．

(2) 母分散．

$$E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \tag{3.9}$$

σ_X^2や$V[X]$などの表記が使われることもあります．

(3) 母標準偏差．

$$\sqrt{V[X]} = \sqrt{E[(X - \mu_X)^2]}$$

平均，分散，標準偏差は，連続型確率変数のときには積分で，離散型確率変数のときには和で定義します．離散と連続で数学的な定義は確かに異なりますが，それらがもつ統計的な意味は変わりません．このため，連続，離散を問わず，平均には表記μ_Xを，分散には表記σ_X^2や$V[X]$を用いるのです．

例題 3.3（制限時間 6 分）$X \sim U(a, b)$のときμ_Xとσ_X^2を求めよ．（解答例は 3.6 節にあります）

命題 3.1（命題 2.1 の一般化）． 確率変数Xと実数$a_0, \dots, a_m$について次式が成り立つ：

$$E\left[\sum_{n=0}^{m} a_n X^{m-n}\right] = \sum_{n=0}^{m} a_n E[X^{m-n}] \tag{3.10}$$

<u>**証明**</u>　命題 2.1 より，Xが連続型の場合のみ考えれば十分です．有限和と積分の順序交換可能性より，

$$\left(\text{左辺}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{m} a_n x^{m-n}\right) f_X(x)dx = \sum_{n=0}^{m} a_n \int_{-\infty}^{\infty} x^{m-n} f_X(x)dx = \left(\text{右辺}\right) \qquad \square$$

次の事実は，正規分布に関する「極限定理」の証明などに応用があります．

定理 3.1．（チェビシェフ不等式）． kを正の実数，Xを確率変数とします．このとき次の不等式が成り立ちます．

$$P\left(|X-\mu| \geq k\sqrt{\sigma^2}\right) \leq \frac{1}{k^2} \tag{3.11}$$

<u>**証明**</u>　連続型の場合を考えます（離散型の場合は各自チェック）．$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid |x-\mu| \geq k\sqrt{\sigma^2}\right\}$とおきます．定義より，$X$の密度関数$f$は非負の値しかとりません．ゆえに，

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

$$\geq \int_A (x-\mu)^2 f(x)dx \geq \int_A k^2\sigma^2 f(x)dx = k^2\sigma^2 \int_A f(x)dx = k^2\sigma^2\, P\left(|X-\mu| \geq k\sqrt{\sigma^2}\right).$$

最後に両辺を$\sigma^2 k^2$で割ると(3.11)を得ます．　$\square$

３．６．　例題の解答例

<u>例題 3.1 の解答例</u>

$$P(X>s+t\mid X>s)=\frac{P(\{X>s+t\}\cap\{X>s\})}{P(X>s)}=\frac{P(X>s+t)}{P(X>s)}$$
$$=\frac{\int_{s+t}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx}{\int_{s}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx}=\frac{\left[-e^{-\lambda x}\right]_{s+t}^{\infty}}{\left[-e^{-\lambda x}\right]_{s}^{\infty}}=\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}=\int_{t}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx.$$

<u>例題 3.2 の解答例</u>　$X\sim U(a,b)$のとき，

$$\mu_X=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx\;=\left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}.$$

母分散σ_X^2も同様に計算します．実際，

$$\sigma_X^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)^2f_X(x)dx=\int_a^b\frac{(x-\mu_X)^2}{b-a}dx\;=\left[\frac{(x-\mu_X)^3}{3(b-a)}\right]_a^b=\frac{(b-\mu_X)^3-(a-\mu_X)^3}{3(b-a)}$$

としてから，μ_Xの値を代入すると，

$$\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}{3}=\frac{2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{3}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

<u>例題 3.3 の解答例</u>

(1) 両側$100\alpha\%$点z_αを求めるには，標準正規分布表の一列目で一の位と小数第一位の値を，一行目で小数第二位の値を決めます．例えば$z_\alpha=1.96$となるαは，一列目の 1.9，二列目の 0.06 に対応する数値 0.475 になります．この場合，$Z_{0.05}=1.96$であり，$P(0\le X\le z_{0.05})=0.475$が成り立ちます．

(2) $P(0<X\le 1.96)=P(0\le X\le 1.96)-P(X=0)$.

(3) 標準正規分布の密度関数がy軸対称であることを用いてください．

３．７．　章末問題

問題 B-3-1　$X\sim N(\mu,\sigma^2)$について，$\mu_X=\mu$および$\sigma_X^2=\sigma^2$が成り立つことを示しなさい．

<u>参考文献</u>

[稲垣 2014] 稲垣 宣生，山根 芳知，吉田 光雄 著．統計学入門．裳華房．2014.
[西尾 1978] 西尾 真喜子 著．確率論．実教出版．1978.

第４章　確率ベクトル

４．１．　複数のデータを同時に扱う

個人の身長，体重，胸囲，座高のデータを調べるとき，それらのデータを（身長，体重，胸囲，座高）のようにベクトルでまとめて扱うことが少なくありません．身体測定の前，i番目のサンプルの個人データは確率変数のベクトル$(X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, X_{i4})$と見なすことができます．

本章では，このようなベクトルを**確率ベクトル**と呼び，その基本的な性質を調べます．

４．２．確率ベクトル

４．２．１．　連続型の場合

定義 4.1.（同時密度関数）． 連続型確率変数X, Yについて，次の条件を満たす 2 変数関数$f_{X,Y}(x, y)$を，X, Yの**同時密度関数**と呼ぶ．

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dxdy = 1.$

(2) 任意の$a_1 < b_1$，$a_2 < b_2$について，$P(a_1 \le X \le b_1, a_2 \le Y \le b_2) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f_{X,Y}(x, y)dxdy.$

一般にn変数の場合でも，同時密度関数の概念は同様に定義されます．

例 4.1.（n変量一様分布）． 実数$a_i < b_i$（$i = 1, \dots, n$）に対して，同時密度関数が

$$f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)} & a_i \le x_i \le b_i, i = 1, \dots, n \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{4.1}$$

で与えられるとき，連続型確率ベクトル$(X_1, \dots, X_n)$は**n変量一様分布に従う**と呼ばれます．

例 4.2.（n変量標準正規分布）． 同時密度関数が

$$f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2}\right), \quad -\infty < x_1, \dots, x_n < \infty \tag{4.2}$$

で定義されるとき，連続型確率ベクトル(X, Y)は**n変量（標準）正規分布に従う**といいます．

標本調査を行う際，抽出されたサンプルは互いに影響を及ぼし合わないものであってほしい．連続型の場合，この「独立性」は次のように定式化されます．

定義 4.2.（r.v.の独立性）． 連続型確率変数X, Yは，

$$\text{任意の}x, y\text{について}\ f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \tag{4.3}$$

が成り立つとき，**独立である**という．

命題 4.1. 連続型確率変数X, Yが独立であるとする．このとき，任意の$a_1 < b_1$，$a_2 < b_2$について次式が成り立つ．

$$P(a_1 \leq X \leq b_1, a_2 \leq Y \leq b_2) = P(a_1 \leq X \leq b_1) P(a_2 \leq Y \leq b_2) \tag{4.4}$$

証明　連続型確率変数X, Yが独立であるとすると，

$$\begin{aligned} P(a_1 \leq X \leq b_1, a_2 \leq Y \leq b_2) &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f_{X,Y}(x,y) dxdy \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f_X(x,y) f_Y(x,y) dxdy \\ &= \left(\int_{a_1}^{b_1} f_X(x,y) dx \right) \left(\int_{a_2}^{b_2} f_Y(x,y) dy \right) \\ &= P(a_1 \leq X \leq b_1)(a_2 \leq Y \leq b_2) \end{aligned}$$

□

注 4.1. X, Yが連続型の場合，任意の$a_1 < b_1$，$a_2 < b_2$に対して$P(a_1 \leq X \leq b_1, a_2 \leq Y \leq b_2)$を把握することと，任意の事象$A, B$に対して$P(X \in A, Y \in B)$を把握することは等価になることがわかります．$P(X \in A, Y \in B)$を，１変数の場合と同様，**（同時）確率分布**と呼びます．

例題 4.1（制限時間 5 分） (X_1, X_2)が多変量（標準）正規分布に従うとする．このとき，X_1, X_2は独立であることを示しなさい．

４．２．２．　離散型の場合

注 1.1 で見たように，Xが離散型の場合には，確率関数を用いて，確率分布を

$$P(X \in A) = \sum_{a \in A} P(X = a)$$

のように書き表すことができます．多変数の場合にもこれと同じことができます．すなわち，

$$P(X \in A, Y \in B) = \sum_{a \in A, b \in B} P(X = a, Y = b) \tag{4.5}$$

のように，数ベクトル空間上の点(a,b)に実数$P(X = a, Y = b)$を対応させる多変数関数により同時確率分布を表すことができます．この多変数関数を，1 変数の場合と同様に，**(同時）確率関数**と呼びます．

例 4.4.　サイコロを 2 個振って，1 の目が出る回数をX，2 の目が出る回数をYとおきます．

表 4.1.

$Y \setminus X$	0	1	2
0	16	8	1
1	8	2	
2	1		

表 4.1 は(X,Y)の同時確率関数の値をまとめたものであり，同時確率分布を可視化したものになっています．表 4.1 の各値を 36 で割ることで，同時確率分布を図 4.1 のように図で表現することもできます．

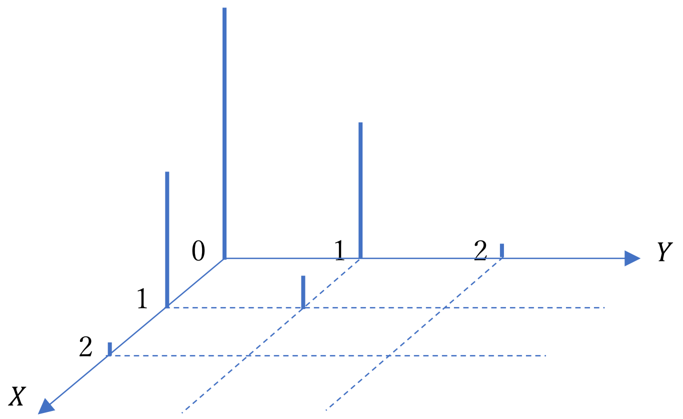


図 4.1

定義 4.3.（r.v.の独立性（離散型の場合））.（離散型）確率変数X, Yは，

$$\text{任意の} x_i, y_j \text{について}\ P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \tag{4.6}$$

が成り立つとき，**独立である**という．

例 4.5.　大きいサイコロと小さいサイコロを一つずつ振る試行を行い，それぞれの出目をX, Yとおきます．「大サイコロの出目がiである」事象は「$X = i$」で，「小サイコロの出目がjである」事象は「$Y = j$」で表されます．「大サイコロの出目がiで，小サイコロの出目がjである」事象の確率は，iとjの選び方に依らず

$$P(X=i, Y=j)=\frac{1}{36}=\left(\frac{1}{6}\right)^2=P(X=i)P(Y=j)$$

のように計算することもできます．サイコロを 2 個振るとき，それらの出目が互いに影響を及ぼし合わないだろうという私達の直観を説明しています．

次の命題が示すように，2 つの確率変数が独立であることと，同時確率分布が 2 つの確率分布の積に分解されることは等価になります．（各自チェック！）

命題 4.2（注 4.1）.（離散型）確率変数X, Yについて，次の主張は等価です．

(1) XとYは独立である．

(2) 任意の事象A, Bに対して次式が成り立つ：

$$P(X \in A, Y \in B)=P(X \in A)P(Y \in B). \tag{4.7}$$

例題 4.2（制限時間 6 分） 平等な（等確率 1/2 で表裏が出る）コインを 3 回投げて，i回目が表なら$X_i=1$，裏なら$X_i=0$とおきます．また

$$X=X_1+X_2+X_3,$$

$$Y=\begin{cases}1 & \text{2 回以上続けて表が出る} \\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

とおきます．このときXとYの独立性を判定しなさい．（解答例は 4.4 節にあります）

４．３． 確率ベクトルの期待値，期待値の線形性

ここでは，確率変数の期待値の概念の多変数化を与えた後，複数の確率変数の一次結合**（一次統計量）**の期待値の線形性を示します．

定義 4.4.（期待値）.

(1) 連続型確率変数X, Yの二変数関数$g(X, Y)$について

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)dxdy \tag{4.8}$$

をgの**期待値**と呼び，$E[g(X,Y)]$と表す．

(2) 離散型確率変数X, Yの二変数関数$g(X, Y)$について，

$$\sum_{i,j} g(x_i, y_j)P(X=x_i, Y=y_j) \tag{4.9}$$

をgの**期待値**と呼び，$E[g(X,Y)]$と表す．

定義 4.5.（共分散）.
(1) 連続型確率変数X, Yについて，

$$E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)\, f_{X,Y}(x,y)dxdy \tag{4.10}$$

をX, Yの**共分散**と呼び，$\mathrm{Cov}[X, Y]$や$\sigma_{X,Y}$と表す．
(2) 離散型確率変数X, Yについて，

$$E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \sum_{i,j}(x_i-\mu_X)(y_j-\mu_Y)P(X=x_i, Y=y_j) \tag{4.11}$$

をX, Y**の共分散**と呼び，$\mathrm{Cov}[X, Y]$や$\sigma_{X,Y}$と表す．

共分散は二つの確率変数X, Yの「相関」を表しています．

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sqrt{\sigma_X^2}\sqrt{\sigma_Y^2}}$$

で与えられる量を，X, Yの**相関係数**と呼びます．コーシー・シュワルツの不等式より，

$$|\rho_{X,Y}| \le 1$$

であり，さらに等号が成り立つことと$X-\mu_X$と$Y-\mu_Y$が同一直線上に位置することは同値であることがわかります（各自チェック！）．$\rho_{X,Y}$が正で1に近いほどXとYは右上がりに「直線的」に分布し，逆に$\rho_{X,Y}$が負で-1に近いほどXとYは右下がりに「直線的」に分布することを意味します．詳しいことは文献[稲垣 2014]を参照してください．

定理 4.1. $X_1, \dots, X_n$を確率変数とし，$a_1, \dots, a_n$を実数とします．
(1) **（一次統計量の線形性）** 一次統計量$\sum_{i=1}^n a_i X_i$について次式が成り立ちます：

$$E\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n a_i E[X_i]. \tag{4.12}$$

(2)

$$V\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i\right] = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \mathrm{Cov}[X_i, X_j]. \tag{4.13}$$

特に$X_1, \dots, X_n$が独立であるとき，

$$V\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathrm{V}[X_i]. \tag{4.14}$$

(1)の証明 簡単のため$n=2$とし，X_1, X_2が連続型の場合のみを考えます．

$$\begin{aligned}E[a_1X_1 + a_2X_2] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(a_1x_1 + a_2x_2)\, f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 \\ &= a_1\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1\, f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 + a_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_2\, f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2\end{aligned}$$

$$= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\, dx_2 \right) dx_1 + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\, dx_1 \right) dx_2$$

$$= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1}(x_1)\, dx_1 + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{X_2}(x_2)\, dx_2$$

$$= a_1 E[X_1] + a_2 E[X_2].$$

(2)の証明

$$\begin{aligned}
V[a_1X_1 + a_2X_2] &= E[(a_1X_1 + a_2X_2)^2] - (E[a_1X_1 + a_2X_2])^2 \\
&= E[a_1^2X_1^2 + 2a_1a_2X_1X_2 + a_2^2X_2^2] - (a_1E[X_1] + a_2E[X_2])^2 \\
&= a_1^2E[X_1^2] + 2a_1a_2E[X_1X_2] + a_2^2E[X_2^2] \\
&\qquad -\{a_1^2(E[X_1])^2 + 2a_1a_2E[X_1]E[X_2] + a_2^2(E[X_2])^2\} \\
&= a_1^2\{E[X_1^2] - (E[X_1])^2\} + 2a_1a_2(E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2]) \\
&\qquad +a_2^2\{E[X_2^2] - (E[X_2])^2\} \\
&= a_1^2V[X_1] + 2a_1a_2\mathrm{Cov}[X_1,X_2] + a_2^2V[X_2] \\
&= \textstyle\sum_{i,j=1}^{2} a_ia_j\mathrm{Cov}\left[X_i,X_j\right].
\end{aligned}$$

（一つ目と五つ目の等号で章末問題 B-2-2 を，二つ目と三つ目の等号で期待値の線形性を，そして六つ目の等号で$\mathrm{Cov}[X,X] = V[X]$（共分散の定義）を使いました）

後半の主張の証明は割愛します（各自チェック！）． □

系 4.1. 母平均μ, 母分散σ^2の母集団からn個の独立なサンプル（ランダムサンプル）$X_1,\dots,X_n$をとります．また

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{4.15}$$

とおく．このとき次が成り立つ．

$$E[\bar{X}] = \mu, \tag{4.16}$$

$$V[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n} \tag{4.17}$$

(4.15)式左辺の$\bar{X}$を，$X_1,\dots,X_n$の**標本平均**と呼びます．(4.15)式のように，ある確率変数の期待値が母数αに等しくなるとき，その確率変数をαの**不偏推定量**と呼びます．(4.17)式の統計的な意味は

$$V[\bar{X}] \to 0 \quad (n \to \infty)$$

を満たすこと，つまりサンプル数が十分大ならばデータのばらつきがほとんどなくなるということです．

次の事実（系 4.2）は**大数の法則**と呼ばれています．証明にはチェビシェフ不等式（定理 3.1）を使います．

系 4.2.（大数の法則）． 母平均μ，母分散σ^2の母集団からn個のランダムサンプル$X_1, \dots, X_n$をとる．このとき，任意のϵに対して

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X} - \mu| < \epsilon) = 1 \tag{4.18}$$

1 枚の平等な硬貨を繰り返し投げて，i回目に表が出たら$X_i = 1$，そうでなければ$X_i = 0$とします．このとき，標本平均$\bar{X}$はn回までの相対頻度を表します．(4.18)式は，試行回数が増えるにつれ，相対頻度が母平均$\mu = \frac{1}{2}$に近づいていくことを説明しています．

４．４．　例題の解答例・ヒント

<u>**例題 4.1 の解答例**</u>　(X_1, X_2)が多変量（標準）正規分布に従うとすると，

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x_2^2}{2}\right) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2).$$

同時密度関数f_{X_1,X_2}は一変数関数$f_{X_i}(x_i) = \exp\left(-x_i^2/2\right)/\sqrt{2\pi}$の積に分解されたので，$X_1$と$X_2$は独立．（いまの場合，各確率変数$X_i$は標準正規分布に従っている）

<u>**例題 4.2 の解答例（ヒント）**</u>　独立ではない．いくつかの(i, j)について，$P(X = i, Y = j)$の値と$P(X = i)P(Y = j)$の値を具体計算せよ．

４．５．　章末問題

問題 A-4-1　$\mathrm{Cov}[X_1, X_2] = 0$であっても独立でない確率変数$X_1, X_2$の例をつくりなさい．

問題 A-4-2　X_1, X_2を独立な確率変数とし，a_1, a_2を実数とします．このとき$\mathrm{Cov}[X_1, X_2] = 0$が成り立つことを確かめなさい（$X_1, X_2$がともに「離散型」か「連続型」の場合に）．

<u>**参考文献**</u>

［稲垣 2014］稲垣　宣生，山根　芳知，吉田　光雄　著．統計学入門．裳華房．2014．

第 5 章　正規分布

例えば国政上重要な選挙のとき，マスコミが特番を組んで選挙結果の速報を流しているのをよく目にします．そのとき，たった数%の開票率であるにも関わらず特定の候補者の当選確実がアナウンスされることがあります．ここには**正規分布**が深く関与しています（本稿付録 D 参照）．本章では，この正規分布の基本的な性質を概観します．

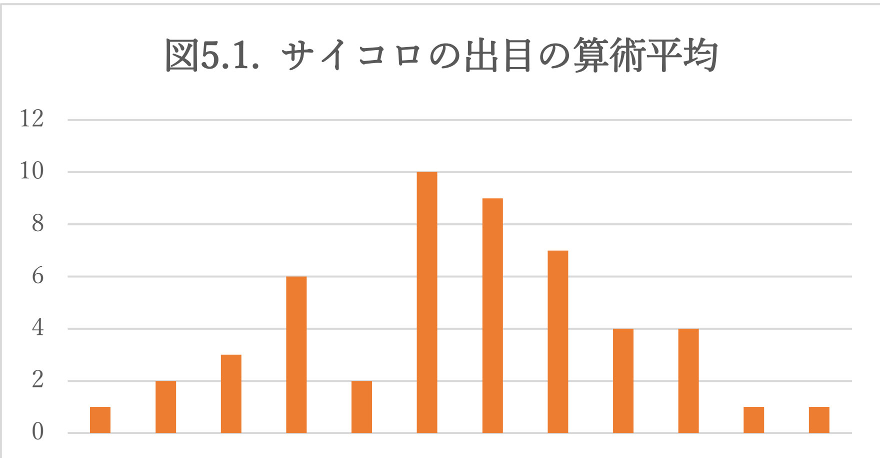
５．１．正規分布のおさらい

サイコロをn回投げて，i回目の出目をX_iとおきます．サイコロを投げる前，サイコロの出目は等確率で 1 から 6 までの値をとる確率変数と見なすことができます．下の表 5.1 は，各$1 \leq n \leq 50$について，Excel で乱数サイコロを投げて**標本平均** $\bar{X}_n$（出目の算術平均）の実測値をまとめたものです．

表 5.1. $\bar{X}_n$の相対度数表

階級	度数/頻度	階級	度数/頻度
0.5 以下	1	3 より大 3.5 以下	9
0.5 より大 1 以下	2	3.5 より大 4 以下	7
1 より大 1.5 以下	3	4 より大 4.5 以下	4
1.5 より大 2 以下	6	4.5 より大 5 以下	4
2 より大 2.5 以下	2	5 より大 5.5 以下	1
2.5 より大 3 以下	10	5.5 より大	1

下図は表 1.1 をヒストグラムにしたものです．サンプル数が大きくなるにつれて，グラフの概形は滑らかな曲線（**密度関数**）に収束していくような気がしてくるでしょう？



一般に，特定の母集団から独立なサンプルを抽出するとき，それらは同一の確率分布に従うと考えて，サンプルを十分たくさんとれば，Xの確率分布は，母集団分布に依ることなく，ある連続型の確率分布に収束するのです（**中心極限定理**）．それが**正規分布**です．数学的には，

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad -\infty < x < \infty \tag{5.1}$$

で密度関数が与えられる確率分布です．特に$\mu = 0, \sigma^2 = 1$の正規分布を**標準正規分布**と呼び，$X \sim N(0, 1^2)$と書きます．「N」は Normal（正規）の頭文字です．

標準正規分布の密度関数には，① 対称軸がy軸，② 漸近線がx軸，③ ロングテイル（裾の長い釣鐘型），という 3 つの重要な性質があります（図 1.2）．例えば$X \sim N(0, 1^2)$の場合，

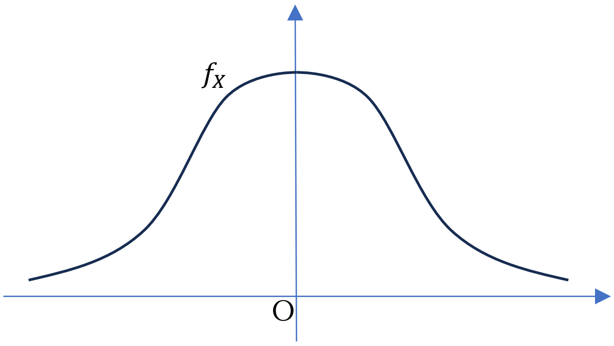


図 5.2

その確率分布は

$$P(a \le X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

のように積分で表されます．この積分計算においても密度関数の対称性などが有効です．

5．2．　標準化

命題 5.1.（標準化）.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \sim N(0, 1^2) \tag{5.2}$$

<u>「⇒」の証明</u>　$X \sim N(\mu, \sigma^2)$とし，$Y = (X-\mu)/\sqrt{\sigma^2}$とおきます．すると，

$$P(a < Y < b) = P\left(a < \frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} < b\right) = P\left(a\sqrt{\sigma^2} + \mu < X < b\sqrt{\sigma^2} + \mu\right)$$

$$= \int_{a\sqrt{\sigma^2}+\mu}^{b\sqrt{\sigma^2}+\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy.$$

最後の等号は変数変換$y = (x-\mu)/\sqrt{\sigma^2}$によるものです．式変形を逆向きに辿ると「⇐」が示されます．　□

例題 5.1. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$について，次の各問に答えよ．

(1) $\mu = 0, \sigma^2 = 1^2$のとき，$P(0 \le X \le 1.96)$の値を求めよ．（ヒント：標準正規分布表（付表 1）を読む．表のz_αを標準正規分布の両側$100\alpha\%$点と呼ぶ）

(2) $\mu = -1, \sigma^2 = 2^2$のとき，$P(X \le x) = 0.95$となるxを求めよ。（ヒント：命題 5.1 を使う）

5．3．正規分布の性質

正規分布の重要な性質を 2 つ紹介します．1 つ目の性質は「再生性」です．証明については文献[西尾 1978]などを参照してください．

定理 5.1.（正規分布の再生性）.

$$X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^2) \text{ 独立} \quad \Rightarrow \quad a_1X_1 + a_2X_2 \sim N(a_1\mu_1 + a_2\mu_2, a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2)$$

もう一つの重要な性質は「中心極限定理」です．サンプルを十分大にすると，母集団の分布がわからなくても標本平均$\bar{X}$の分布が正規分布に収束することを主張するものです．

定理 5.2.（中心極限定理）. $X_1, \ldots, X_n$を母平均μ，母分散σ^2の母集団からのサンプルとします．このとき，任意の正の実数αに対して次の等式が成り立ちます．

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \le \alpha\right) = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \tag{5.3}$$

5．4．　例題の解答例

例題 5.1(2)の解答例　$Y = \frac{X+1}{2} \sim N(0,1^2)$に注意して（命題 5.1），

$$P(X \le x) = P\left(Y \le \frac{x+1}{2}\right) = P(Y \le 0) + P\left(0 < Y \le \frac{x+1}{2}\right) = 0.45.$$

標準正規分布表を読んで，$x = 2.28, 2.29, 2.30.$

参考文献

[西尾 1978] 西尾 真喜子 著．確率論．実教出版．1978.

第６章　正規分布から派生する分布

６．１．　確率変数の「二次形式」の分布は？

第 5 章では，$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$かつそれらが独立である場合に，一次統計量$a_1X_1 + a_2X_2$が再び正規分布に従うことを見ました（定理 5.1）．

本章では，正規分布に従う確率変数$X_1, X_2, \ldots$が与えられたとき，これらの**二次統計量**$a_1X_1^2 + a_2X_2^2 + \cdots$が$\boldsymbol{\chi^2}$**分布（カイ二乗分布）**という特別な分布に従うことを見た後，χ^2分布から派生する$\boldsymbol{t}$**分布（ティー分布）**についても概観します．正規分布とこれら二つの分布は，「区間推定法」「仮説検定法」において重要な役割を果たすのです．

６．２．　χ^2分布

定義 6.1（$\boldsymbol{\chi^2}$分布）．　$X_1, \ldots, X_n \sim N(0, 1^2)$が独立であるとき，二次統計量

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \tag{6.1}$$

が従う連続型確率分布を**自由度$\boldsymbol{n}$の$\boldsymbol{\chi^2}$分布**と呼び，$X \sim \chi_n^2$と表す．

定理 6.1. $X_1, \ldots, X_n$を母平均μ，母分散σ^2の正規母集団からのランダムサンプルとする（つまり$X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$を独立な確率変数とする）．このとき次が成り立つ．

(1)
$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \sim \chi_n^2 \tag{6.2}$$

(2)
$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sim \chi_{n-1}^2 \tag{6.3}$$

注 6.1（文献[西尾 1978]等参照）． $X_1 \sim \chi_m^2$，$X_2 \sim \chi_n^2$が独立であるならば，$X_1 + X_2 \sim \chi_{m+n}^2$.

(6.2)式の$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$は，確率ベクトル$(X_1, \ldots, X_n)$と中心ベクトル$(\mu, \ldots, \mu)$の距離の 2 乗であり，サンプル$X_1, \ldots, X_n$から採取した実データ$x_1, \ldots, x_n$が$\mu$の周辺にどの程度バラついているかを示しています．(6.2)式は，μが既知の場合に，母分散σ^2の区間推定や仮説検定に応用されます．

母数は「神のみぞ知る」であって，そもそも確率ベクトルと中心ベクトルの距離なんて測り得るのか気になります．しかし，実際のデータ解析においては，過去の経験や製品の規格

などによって母数が既知だと容認されるケースがあるようです．

そうは言っても，標本調査の大義は母数の推定であり，母数を既知にすべきではないと主張したくもなります．そんなときは，μが未知であるとして，「良い」推定量で母数を代用すればよいでしょう．母平均μの「良い」代用物と言えば標本平均$\bar{X}$がありました．(6.3)式で$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$に着目したのはこのためです．本当は$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$を見たいのですが，それが叶わないので$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$で妥協するのです．

注 6.2.　統計量

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \tag{6.4}$$

を**標本分散**と呼び，統計量

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \tag{6.5}$$

は**不偏標本分散**と呼ぶ．「$n-1$」で割るのは，不偏性をもたせるためです．

定理 6.1(1)の証明は難しくなく，確率変数X_iの標準化$(X_i-\mu)/\sigma$の独立性を確かめるだけです．定理 6.1(2)の証明には**フィッシャー・コクランの定理**を用います（本稿付録 E）．

さて，χ^2分布は連続型確率分布ですから，確率密度関数が背後にいるはずです．しかし，密度関数の具体的な形を意識する必要性は（確率論的にはあっても）統計学的にはほぼほぼ皆無です．標準正規分布表を使って正規分布に関する確率計算を行ったのと同じように，χ^2分布に関する確率計算には**χ^2分布表**（巻末の付表 2）を用いればよいからです．

例題 6.1（制限時間 3 分）$X\sim\chi^2_{10}$のとき，χ^2分布表を用いて$P(18.307\leq X)$を求めなさい．χ^2分布表の$\chi^2_n(\alpha)$を**上側α点**あるいは**上側100α%点**と呼ぶ．

６．３．　t分布，F分布

定義 6.2.（t分布）．　$X\sim N(0,1^2)$, $Y\sim\chi^2_n$が独立なとき，統計量

$$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \tag{6.6}$$

が従う連続型確率分布を**自由度nのt分布**と呼び，$T\sim t_n$と表す．

定理 6.2. $X_1,\ldots,X_n$を母平均μ，母分散σ^2の正規母集団からのランダムサンプルとする．このとき次式が成り立つ．

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})/n}} \sim t_{n-1} \tag{6.7}$$

注 6.3. 母分散σ^2が既知の場合には，適切な仮定のもとで

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1^2) \tag{6.8}$$

となる事実を用いて母平均μを推定することができます．ここで「適切な仮定」とは，母集団に正規分布性が認められるとか，サンプル数が十分大であるとか，そういうことです．しかし，母分散σ^2が未知の場合には，(6.8)式は使いものにならず，σ^2を不偏標本分散$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})$で代用した(6.7)式で妥協しなければならなくなります．

χ^2分布と同様，t分布は連続型確率分布であり，確率密度関数が背後にいます．しかし，ここでも密度関数の具体的な形を意識する必要性は微塵もありません．t分布に関する確率計算には**t分布表**（巻末の付表 3）が用意されているからです．

最後に，実験計画法の分散分析において有用な**F分布（Fisher distribution）**に触れます．

定義 6.3.（F分布）. $X \sim \chi_n^2, Y \sim \chi_m^2$が独立なとき，統計量

$$F = \frac{X/n}{Y/m} \tag{6.9}$$

が従う連続型確率分布を**自由度(n,m)のF分布**と呼び，$T \sim F_m^n$や$T \sim F(n,m)$と表す．

例題 6.2（制限時間 3 分） $X \sim t_5$のとき，t分布表を用いて$P(|X| < 2.571)$を求めなさい．ただし，t分布表の値$t_n(\alpha)$を**両側α点**あるいは**両側100α%点**と呼ぶ．

Coffee Break　$T \sim F_m^n$のときの確率計算にはF分布表が用いられます．

F分布の「F」は，統計学の大家 Ronald A. Fisher に因んでいます．ちなみに，t分布は，「Student」のペンネームで活躍した英国の統計学者 William S. Gosset によって発表され，その後 Fisher によって命名されました．フィッシャー・コクランの定理然り，Fisher は確率分布論において多大な功績を残した人物なのです．

６．４．　例題の解説，ヒント

例題 6.1 の解答例　χ^2分布表の下から 1 行目，右から 3 行目に18.307があります．右から 3 行目の値は 0.05 なので，$P(18.307 \leq X) = 0.05$です．

例題 6.2 の解答例　例題 6.1 と同様.

６．５．　章末問題

問題 A-6-1　$X \sim \chi_5^2$のとき，$P(0.831 \leq X < 12.832)$を求めなさい.

問題 B-6-1　$X_1, X_2 \sim N(0,1^2)$で独立とする．このとき次の各問に答えよ.

(1) $X_1^2 + X_2^2$はどのような確率分布に従うか.

(2) $(X_1^2 + X_2^2)^2$はどのような確率分布に従うか．また，$\sum_{i=1}^{5}\left(\left(\cos\frac{2i\pi}{5}\right)X_1 + \left(\sin\frac{2i\pi}{5}\right)X_2\right)^4$はどのような確率分布に従うか.

参考文献

[稲垣 2014]　稲垣　宣生，山根　芳知，吉田　光雄　著．統計学入門．裳華房．2014.

[西尾 1978]　西尾　真喜子　著．確率論．実教出版．1978.

第 7 章　区間推定法

７．１．　区間推定法とは？

データ解析の強力な手法の一つに「区間推定法」があります．この手法を用いることによって解ける現実的な問題として，例えば次のようなものが挙げられます．

(Q7.1) 中堅社会人の月平均の交際費の真値μ（円）を知りたいとして，100 名をランダムに選び，データを集めたところ，標本平均値$\bar{x} = 10000$（円）を得たとします．このとき，経験的に母標準偏差$\sqrt{\sigma^2} = 100$（円）が既知であるとして，μの **95%信頼区間**（確率 95%でμがおさまる区間）を求めなさい．

(Q7.2) 新卒社会人の交際費の月平均の回数μ（回）を知りたいとして，10 名をランダムに選びデータを集めたところ，標本平均値$\bar{x} = 12.8$（回），標本分散値$s^2 = 18.4$を得たとします．このとき，μの 95%信頼区間を求めなさい．ただし，各サンプルは同一の正規分布に従うとします．

推定法は点推定と区間推定の 2 種類に大別されます．**区間推定**では母数を抑え込む区間を推測するのに対して，**点推定**では母数をピンポイントで推測します．例えば月平均飲み代の話だと,「確率○○%で$\mu \in (9500,10500)$」のように推測するのが区間推定で,「確率○○%で$\mu = 10200$」のように推測するのが点推定です.「確率○○%で$\mu \in (9500,10500)$」において，区間(9500,10500)をμの**信頼区間**と呼び，$\mu \in (9500,10500)$となる確率○○%を**信頼度**と呼びます．ここでは主に区間推定の方法を学びます．

７．２．　母平均μの区間推定

母平均μの区間推定法は，母分散σ^2が既知の場合と未知の場合に大別されます．基本的な流れは変わりませんが，使用する分布論が異なります．

σ^2が既知の場合（過去の経験や製品の規格によってσ^2がわかっている場合）

以下,「サンプル数nが十分大」あるいは「正規母集団」のいずれかを仮定します．すると，

正規分布の再生性（定理 5.1）や中心極限定理（定理 5.2）から，

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\sim N(0,1^2) \tag{7.1}$$

が成り立ちます．これを用いて区間推定の流れを説明します．

手順 1（**信頼度$100(1-\alpha)\%$（$0<\alpha<1$）の設定**）

$\alpha=0.1$，0.05，0.01とすることが多いです．$\alpha=0.01$とするのは，高額な機器の製造とか，致死率の高いウイルスの特効薬の開発とか，ミスが許されないような厳しい状況です．

手順 2（**標準正規分布の両側$100\alpha\%$点z_αの計算**）

（両側$100\alpha\%$点z_αとは，$P(|Z|\le z_\alpha)=1-\alpha$を満たす点であったことを思い出しましょう）

手順 3（**信頼度$100(1-\alpha)\%$の信頼区間の「理論値」の計算**）

$$|Z|\le z_\alpha \iff \mu\in\left(\bar{X}-z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}},\bar{X}+z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) \tag{7.2}$$

のように母平均を抑え込む区間を求めます．

手順 4（**信頼度$100(1-\alpha)\%$の信頼区間の「実測値」の計算**）

具体的には，$\bar{X}$の実測値（標本平均値）$\bar{x}$，サンプル数n，（既知の）母分散値σ^2，両側$100\alpha\%$点の値z_αを(7.2)式に代入して，信頼区間の「実測値」を計算します．

区間推定法とはこれらの手順の総称です．大切なのは「流れ」であって，例えば手順 3 と手順 4 を合体させて手順を 3 つにしてもらってもかまいません．

例題 7.1（制限時間 7 分）2024 年度の新生児の平均体重μを知りたいとして，サンプル$X_1,\dots,X_{100}$をランダムに選びデータを集計した後，標本平均値$\bar{x}=3027$g を得たとする．$\sigma^2=1600$を既知として，μの 95%信頼区間を求めなさい．

続いて，母分散σ^2が未知の場合を考えましょう．

σ^2が未知の場合

σ^2は神のみぞ知る母数ですから，σ^2は未知である方が自然です．以下，正規母集団を仮定します．すると，定理 6.2 より，次が成り立ちます：

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2/n}}\sim t_{n-1} \tag{7.3}$$

これを用いて区間推定を行います．

<u>手順１</u>（**信頼度**$\mathbf{100(1-\alpha)\%}$（$\mathbf{0<\alpha<1}$）**の設定**）

<u>手順２</u>（$\boldsymbol{t}$**分布の両側**$\mathbf{100\alpha\%}$**点**$\boldsymbol{t_{n-1}(\alpha)}$**の計算**）
（両側$100\alpha\%$点$t_{n-1}(\alpha)$は，$P\left(|T|\leq t_{n-1}(\alpha)\right)=1-\alpha$で定義されたことを思い出しましょう）

<u>手順３</u>（**信頼度**$\mathbf{100(1-\alpha)\%}$**の信頼区間の「理論値」の計算**）

$$|T|\leq t_{n-1}(\alpha)\Leftrightarrow\mu\in\left(\bar{X}-t_{n-1}(\alpha)\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n(n-1)}},\bar{X}+t_{n-1}(\alpha)\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n(n-1)}}\right)\tag{7.4}$$

のように母平均を抑え込む区間を求めます．

<u>手順４</u>（**信頼度**$\mathbf{100(1-\alpha)\%}$**の信頼区間の「実測値」の計算**）
　具体的には，$\bar{X}$の実測値（標本平均値）$\bar{x}$，サンプル数n，両側$100\alpha\%$点の値$t_{n-1}(\alpha)$を代入して，信頼区間の「実測値」を計算します．

　いかがでしょうか？母分散が既知の場合と手順はまったく同じです．ただ，分布論が異なるだけです．

７．３．　母分散$\boldsymbol{\sigma^2}$の区間推定

　母分散σ^2の区間推定法は，母平均μが既知の場合と未知の場合に大別されます．基本的な流れは変わりません．ただ注目する分布論がほんの少し異なるだけです．

<u>**母平均**$\boldsymbol{\mu}$**が未知の場合**</u>　以下，正規母集団を仮定します．このとき，ランダムサンプル$X_1,\ldots,X_n\sim N(\mu,\sigma^2)$をとると

$$X=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi_{n-1}^2\tag{7.5}$$

が成り立ちます（定理 6.1(2)）．この分布論を使って区間推定の流れを説明しましょう．

<u>手順１</u>（**信頼度**$\mathbf{100(1-\alpha)\%}$（$\mathbf{0<\alpha<1}$）**の設定**）

<u>手順２</u>（**カイ２乗分布の両側**$\mathbf{100\alpha\%}$**点**$\boldsymbol{\chi_{n-1}^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$**と**$\boldsymbol{\chi_{n-1}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$**の計算**）

カイ2乗分布はy軸対称ではないことに注意して，

$$P\left(\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \leq X \leq \chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1-\alpha \tag{7.6}$$

手順3（信頼度$\mathbf{100(1-\alpha)}$%の信頼区間の「理論値」の計算）

具体的には，(7.6)式において，

$$\begin{aligned}\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \leq X \leq \chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \leq \chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\end{aligned} \tag{7.7}$$

のように，母分散を抑え込む区間を求めます．この時点ではまだ実測値が代入されていないことに注意しましょう．

手順4（信頼度$\mathbf{100(1-\alpha)}$%の信頼区間の「実測値」の計算）

(7.7)式に，各サンプルX_iの実測値x_i，標本平均$\bar{X}$の実測値$\bar{x}$，両側100α%点の値を代入して，信頼区間の「実測値」を計算します．

注 7.1. 母平均μが既知の場合は，使う分布論を定理 6.1(1)に変えるだけです．推定の流れはまったく同じです．

７．４．　例題の解答例

例題７.１ の解答例　問題文に正規母集団の仮定が明記されていないことに注意し，100 名のサンプル数を十分大と見なします．

手順１　信頼度は95%，つまり$\alpha = 0.05$.

手順２　標準正規分布表を読んで，両側5%点$z_{0.05} = 1.96$を求めます．

手順３　95%信頼区間の「理論値」を求めます：

$$\mu \in \left(\bar{X} - z_{0.05}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \bar{X} + z_{0.05}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right)$$

手順４　95%信頼区間の「実測値」を求めます：

$$\bar{x} \pm z_{0.05}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 3027 \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{1600}{100}} = 3027 \pm 7.84$$

なので，95%信頼区間は

$$\mu \in (3019.16, 3034.84)$$

となります．2024 年度の新生児の平均体重の真値が 95%の高確率で約 3019g～3034g であることがわかりました．

７．５．　章末問題

問題 A-7-1　(Q7.1), (Q7.2)を解きなさい．

本章の内容の一部は[稲垣 2014]の 5 章§4 に対応しています．

参考文献

[稲垣 2014] 稲垣 宣生，山根 芳知，吉田 光雄 著．統計学入門．裳華房．2014.

第８章　仮説検定

８．１．　２つの仮説を戦わせて，片方を勝利させる！！

仮説検定は，母集団について２つの相対する仮説を立て，適切な確率分布論に基づいて，どちらの仮説が正しいか判定するための統計手法です．これらの仮説のうち，一方を**帰無仮説**，もう一方を**対立仮説**と呼びます．帰無仮説と対立仮説は相排反になるように，すなわち一方が真ならばもう一方が偽であるように設計されなければなりません．伝統的に，帰無仮説をH_0，対立仮説をH_1と表します．帰無仮説は文字通り「無かったことに帰すべき仮説」であり，私達の目標はこの帰無仮説H_0を否定することです．これを「帰無仮説H_0を**棄却**する」といいます．

仮説検定によって解ける具体的な問題として，例えば次のようなものが挙げられます．

(Q8.1) 某企業の社員の月平均の交際費の真値μ（円）を知りたいとして，100 名をランダムに選びデータを集計した後，標本平均値$\bar{x} = 29800$（円）を得たとする．経験的に母標準偏差$\sqrt{\sigma^2} = 100$（円）がわかっているとして，$\mu = 30000$の正否を**有意水準 5%**（判断ミスの確率が 5%）で判定せよ．

個人差もあるかもしれませんが，月30000円はちょっと使いすぎな気もします（著者にはまったく想像がつきません）．これがあり得ないと立証したければ，帰無仮説と対立仮説を

$$H_0：\mu = 30000$$

$$H_1：\mu \neq 30000$$

と設定します．このような基本設定のもとで実施される検定を**両側検定**と呼びます．一方，「月 30001 円以上なんてあり得ない！」という立場をとるなら，帰無仮説と対立仮説を

$$H_0：\mu = 30000$$

$$H_1：\mu < 30000$$

と設定すればよいでしょう．このような基本設定のもとで実施される検定を**片側検定**と呼びます．ここでは簡単のため，片側検定には触れず，両側検定のみ扱います．

８．２．　母平均μの両側検定

母平均μの両側検定は，母分散σ^2が既知の場合と未知の場合に大別されます．基本的な流れは変わりませんが，注目する分布論が異なります．

$\boldsymbol{\sigma^2}$が既知の場合　ここでは「サンプル数nが十分大」か「正規母集団」のいずれかを仮定します．すると，正規分布の再生性（定理 5.1）や中心極限定理（定理 5.2）より

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\sim N(0,1^2) \tag{8.1}$$

が成り立ちます．この分布論を使って検定を行います.

手順 0（帰無仮説$\boldsymbol{H_0}$（と対立仮説$\boldsymbol{H_1}$）の設定）

$$H_0：\mu=\mu_0$$
$$H_1：\mu\neq\mu_0$$

手順 1（有意水準（危険率）$\boldsymbol{\alpha}$の設定）

有意水準を$100\alpha\%$と書き表すこともあります．$1-\alpha$あるいは$100(1-\alpha)\%$は**信頼係数**と呼ばれます. 区間推定のときと同じ理由で, $\alpha=0.1$, 0.05, 0.01と設定することが多いです.

手順 2（標準正規分布の両側$\boldsymbol{100\alpha\%}$点$\boldsymbol{z_\alpha}$（$\boldsymbol{P(|Z|\leq z_\alpha)=1-\alpha}$を満たす値）の計算）

手順 3（「棄却域」$\boldsymbol{R=\{z\mid z_\alpha<|z|\}}$の確認）

次のような計算をします：

$$z_\alpha\leq|z|\quad\Leftrightarrow\quad z_\alpha\leq\frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\ \ \text{or}\ \ \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\leq -z_\alpha$$

最後の式に$\mu=\mu_0$（帰無仮説）を代入して次の評価不等式を求めておきます：

$$z_\alpha\leq\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}\quad\text{or}\quad\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}\leq -z_\alpha \tag{8.2}$$

手順 4（帰無仮説$\boldsymbol{H_0}$の判定）

$\bar{X}$の実測値（標本平均値）$\bar{x}$が(8.2)式を満たせばH_0を棄却し，そうでなければH_0を棄却できません（**採択する**といいます).

これらの手順の総称が両側検定です. 大切なのは流れですから, 例えば手順 3 と手順 4 を一緒くたにしてもらってもかまいません.

続いて，母分散が未知の場合を考えましょう.

母分散$\boldsymbol{\sigma^2}$が未知の場合　以下，正規母集団を仮定します．このとき，定理 6.2 より，

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2/n}}\sim t_{n-1} \tag{8.3}$$

が成り立ちます．この分布論を使って両側検定を行います.

手順０（帰無仮説$\boldsymbol{H_0}$（と対立仮説$\boldsymbol{H_1}$）の設定）

$$H_0：\mu = \mu_0$$
$$H_1：\mu \neq \mu_0$$

手順１（有意水準$\boldsymbol{0 < \alpha < 1}$の設定）

手順２（$\boldsymbol{t}$分布の両側$\boldsymbol{100\alpha}$%点$\boldsymbol{t_{n-1}(\alpha)}$の計算）
（両側100α%点$t_{n-1}(\alpha)$は，$P\big(|T| \le t_{n-1}(\alpha)\big) = 1 - \alpha$で定義されたことを思い出しましょう）

手順３（棄却域$\boldsymbol{R = \{t \mid t_{n-1}(\alpha) < |t|\}}$の確認）
　次のような計算をします（$u^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$は不偏標本分散値です）：

$$t_{n-1}(\alpha) < |t| \quad \Leftrightarrow \quad t_{n-1}(\alpha) \le \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{u^2/n}} \ \text{ or } \ \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{u^2/n}} \le -t_{n-1}(\alpha)$$

最後の式に$\mu = \mu_0$（帰無仮説）を代入して次の評価不等式を求めておきます：

$$t_{n-1}(\alpha) \le \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{u^2/n}} \ \text{ or } \ \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{u^2/n}} \le -t_{n-1}(\alpha) \tag{8.4}$$

手順４（帰無仮説$\boldsymbol{H_0}$の判定）
　$\bar{X}$の実測値（標本平均値）$\bar{x}$が(8.4)を満たせばH_0は棄却されて，そうでなければH_0は採択されます．

８．３．　母分散$\boldsymbol{\sigma^2}$の両側検定

　母分散σ^2の両側検定は，母平均μが既知の場合と未知の場合に大別されます．基本的な流れは変わりません．ただ注目する分布論が少し異なるだけです．

$\boldsymbol{\mu}$が未知の場合　以下，正規母集団を仮定します．このとき，ランダムサンプル$X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$をとると

$$X = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2_{n-1} \tag{8.5}$$

が成り立ちます（定理 6.1(2)）．この分布論を使って両側検定を実施します．

手順０（帰無仮説$\boldsymbol{H_0}$（と対立仮説$\boldsymbol{H_1}$）の設定）

$$H_0：\sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1：\sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

手順１（有意水準$\boldsymbol{0<\alpha<1}$の設定）

手順２（カイ２乗分布の両側$\boldsymbol{100\alpha}$%点$\boldsymbol{\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$と$\boldsymbol{\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$の計算）

すでで見たように両側100α%点$\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$と$\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$は次を満たす値です：

$$P\left(\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\leq X\leq\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)=1-\alpha \tag{8.6}$$

手順３（棄却域$\boldsymbol{R=\left\{x\mid\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)<x\quad\text{or}\quad x<\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right\}}$の確認）

この場合，

$$\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)<x\ \ \text{or}\ \ x<\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\leq\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\ \ \text{or}\ \ \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\leq\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

最後の式に$\sigma^2=\sigma_0^2$（帰無仮説）を代入して次の不等式を求めておきます：

$$\Leftrightarrow\quad\sigma_0^2\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\leq\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\ \ \text{or}\ \ \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\leq\sigma_0^2\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \tag{8.7}$$

手順４（帰無仮説$\boldsymbol{H_0}$の判定）

実測値$x_i,\bar{x}$，あるいは不偏標本分散値u^2などを(8.7)式に代入して矛盾が生じなければH_0は棄却され，そうでなければH_0は採択されます．

注 8.1. 母平均μが既知の場合は，使う分布論を定理 6.1(1)に差し替えましょう．検定の流れはまったく同じです．

注 8.2. 分散分析で必要になるのはF検定ですが，検定の流れはまったく同じです．使われる分布がF分布になるだけです．

８．４．　過誤

有意水準は，検定法が万能の手法ではなくミスを伴うことを示唆しています．帰無仮説H_0が真であるのにH_0を棄却してしまう誤りを**第１種過誤**と呼びます．第１種過誤が起きる確率は有意水準αに等しくなります．一方，対立仮説H_1が真であるのにH_0を採択してしまう誤

りを**第 2 種過誤**と呼びます. 例えば, 裁判で検察官サイドにいる場合,「被告は無罪である」が棄却すべき帰無仮説です. つまり, 第 1 種過誤は罪を犯していない善良な市民を有罪とする冤罪行為にあたります. 実際に罪を犯した被告を有罪にできなかった「犯人取り逃がし」は第 2 種過誤にあたります.「疑わしきは罰せず」の精神のもとでは, 第 1 種過誤（冤罪）の方が第 2 種過誤（犯人取り逃がし）よりも（検察サイドの）罪が重いでしょう. もちろん,「疑わしきは罰せず」ではすまない世界もあります. 例えば致死率の高い未知のウイルスが蔓延したとして, その罹患検査においては, 罹患者ではないのに陽性と判断される偽陽性（第 1 種過誤）, 罹患者なのに陰性と判断される偽陰性（第 2 種過誤）はどちらも社会的に深刻な影響を及ぼすでしょう.

実際のデータ解析の現場では, 第 1 種過誤と第 2 種過誤以外にも, 検定方法を間違えたり, 正しい検定を行ったにも関わらず結果の解釈を間違えたり, いろんな過誤が起こり得えます. 仮説検定は切れ味のよいナイフです. データの解析者が適切な使い方をしなければ, 正しい結果が得られないどころか他者に迷惑をかけてしまう諸刃の剣なのです.

8．5． (Q8.1)の解答例

Q8.1 の解答例　問題文に正規母集団の仮定が明記されていないことに注意します. ここでは, 100 名のサンプル数を十分大と見なし, $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1^2)$とします.

手順 0　帰無仮説H_0（と対立仮説H_1）の設定.

$$H_0 : \mu = 30000$$
$$H_1 : \mu \neq 30000$$

手順 1　有意水準$\alpha = 0.05$を設定.

手順 2　標準正規分布分布表を読んで両側 5%点$z_{0.05} = 1.96$を計算.

手順 3　棄却域$R = \{z \mid z_\alpha < |z|\}$の確認.

$\mu = \mu_0 = 30000$（帰無仮説）を用いて

$$1.96 \leq \frac{\bar{x} - 30000}{\sqrt{\frac{100^2}{100}}} \text{ or } \frac{\bar{x} - 30000}{\sqrt{\frac{100^2}{100}}} \leq -1.96 \quad \Leftrightarrow \quad 30019.6 \leq \bar{x} \text{ or } \bar{x} \leq 29980.4$$

手順 4　上の領域に$\bar{x} = 29800$は属するので帰無仮説H_0は棄却されます. つまり, 確率 5%の検定ミスを考慮に入れて,「月平均交際費 30000 円」説はないと結論付けられました.

８．６．　章末問題

問題 B-8-1　水資源の研究者にとって雨の日の翌日の川は宝の山なのだそうです．山から流れでる成分を抽出しやすいからです．いま，R 甲山を流れる S 吉川のポイント 10 か所をランダムに選んで水を採取し，特定物質 X の濃度(%)を調べたところ，次のデータを得たとします．

13.1　12.6　13.4　11.6　14.1　11.8　12.4　10.9　11.2　12.5

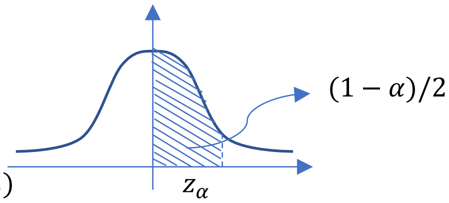
これらから, S 吉川における物質 X の真の濃度μが 12 であるか否かを有意水準 5%で検定しなさい．ただし，S 吉川のポイント全体は正規母集団をなすとします．

本章の内容の多くは文献[稲垣 2014]の 6 章§1～§4 に対応しています．

参考文献

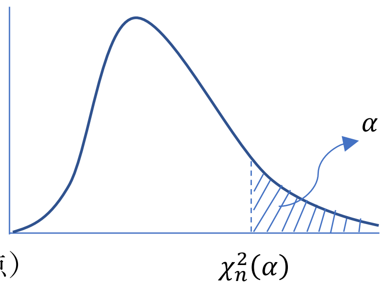
[稲垣 2014]　稲垣　宣生，山根　芳知，吉田　光雄　著．統計学入門．裳華房．2014.

表１：標準正規分布表 $P(0 \leq X \leq z_{\alpha})$



	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0	0.004	0.008	0.012	0.016	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.091	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.148	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.17	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.195	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.219	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.258	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.291	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.334	0.3365	0.3389
1	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.377	0.379	0.381	0.383
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.398	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.437	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.475	0.4756	0.4761	0.4767
2	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.483	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.485	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.489
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.492	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936

付表２：カイ２乗分布表（簡易版）

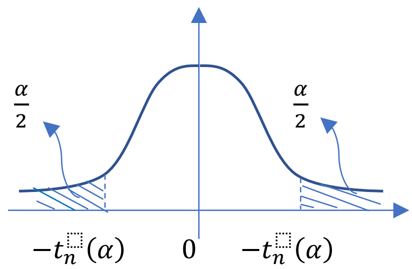


自由度nのカイ２乗分布の上側α点（上側100α%点）

	0.99	0.975	0.95	0.9	0.5	0.1	0.05	0.025	0.01
1	0.00016	0.001	0.00393	0.0158	0.455	2.706	3.841	5.0238	6.635
2	0.0201	0.0506	0.103	0.211	1.386	4.605	5.991	7.378	9.21
3	0.115	0.216	0.352	0.584	2.366	6.251	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	1.064	3.357	7.779	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	1.61	4.351	9.236	11.07	12.832	15.086
6	0.872	1.237	1.635	2.204	5.348	10.645	12.592	14.449	16.812
7	1.239	1.69	2.167	2.833	6.346	12.017	14.067	16.013	18.475
8	1.646	2.18	2.733	3.49	7.344	13.362	15.507	17.535	20.09
9	2.088	2.7	3.325	4.168	8.343	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.558	3.247	3.94	4.865	9.342	15.987	18.307	20.483	23.209

（縦がn，横がα）

付表３：ティー分布表（簡易版）



自由度nのティー分布の両側α点

	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
1	0.158	0.325	0.51	0.727	1	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.92	4.303	6.965	9.925
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.25	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.19	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.92	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.44	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.13	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.13	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.86	2.306	2.896	3.355
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.1	1.383	1.833	2.262	2.821	3.25
10	0.129	0.26	0.397	0.542	0.7	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169

（縦がn，横がα）

付録 A（条件付き確率とベイズの定理）

定義 A.1（条件付き確率）. A, Bを事象とし，$P(A) \neq 0$と仮定します．

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{A.1.1}$$

を，（Aの下での Bの）**条件付き確率**と呼ぶ.

次の事実は条件付確率の定義からただちにわかります.

命題 A.1（乗法公式）. 事象A, Bについて$P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$と仮定する．このとき次が成り立つ.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B) \tag{A.1.2}$$

定理 A.1（ベイズの定理, [稲垣 2014]参照）. 事象$A_1, A_2, \dots, A_n$を互いに素な全事象の分割とする（図 A.1）．このとき，任意の事象Bと添え字iについて，次の等式が成り立つ：

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)}. \tag{A.1.3}$$

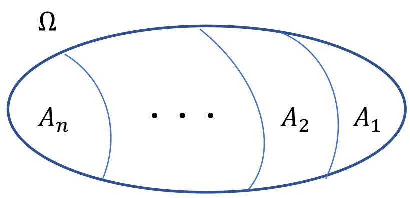


図 A.1

特に$n = 2$，$A_1 = A$，$A_2 = A^c$の場合，

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(A)P(B \mid A) + P(A^c)P(B \mid A^c)}. \tag{A.1.4}$$

条件付き確率やベイズの定理に基礎をおく統計学の枠組みを「ベイズ統計」と呼び，そこでは条件付き確率$P(B \mid A)$の代わりに**事後分布**という用語が用いられます．ベイズの定理は単純ですが，強力です．臨床での医者の病名診断の多くはベイズの定理に基づいています.

例題. 呼吸器系の医師は，咳症状の患者全体の 35%が疾患 C をわずらっており，咳症状αの患者に PCR 検査を実施すると次のような結果になることを経験的に知っているとします.
(1) C をわずらっている患者の 58%が陽性反応を示す.
(2) C をわずらっていない患者の 18%が陽性反応を示す.
このとき，咳症状の患者が PCR 検査で陽性反応を示したとき，疾患 C をわずらっている確率を求めなさい.

付録 B（特性関数，テイラー展開の応用）

定義 B.1（特性関数）． Xを離散型確率変数とする．一変数関数

$$\psi_X(t) := E\left[e^{itX}\right] = \sum_i e^{itx_i} P(X = x_i)$$

を***X*の特性関数**と呼ぶ.

例題 2.2 (2) より，

$$E\left[e^{itX}\right] = E\left[1 + \frac{1}{1!}(itX) + \frac{1}{2!}(itX)^2 + \cdots\right] = 1 + \frac{i}{1!}E[X]t - \frac{1}{2!}E[X^2]t^2 + \cdots$$

が成り立つことに注意しましょう．

特性関数はk次モーメント$E[(X-\mu_X)^k]$の計算に有用です.

例 B.1. Xがパラメータpをもつベルヌーイ分布であるとします．このとき，特性関数は

$$\begin{aligned}\psi_X(t) = \sum_{k=0}^{1} e^{itk} p^k (1-p)^{1-k} &= e^{it}p + 1 - p \\ &= \left(1 + \frac{1}{1!}(it) + \frac{1}{2!}(it)^2 + \frac{1}{3!}(it)^3 + \cdots\right)p + 1 - p \\ &= 1 + ipt - \frac{p}{2}t^2 + \cdots\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\mu_X = E[X] = p.$$

また$E[X^2] = p$なので，

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - E[X]^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

例 B.2. $X \sim B(n,p)$（二項分布）のとき，

$$\psi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{it}p\right)^k (1-p)^{n-k} = \left(e^{it}p + (1-p)\right)^n.$$

これを用いて，母平均μ_X，母分散σ_X^2，歪度$E[(X-\mu_X)^3]$，尖度$E[(X-\mu_X)^4]$を求めてみましょう．一般のk次モーメント$E[(X-\mu_X)^k]$の値はどうなるでしょう？

次の事実はよく知られています．証明は割愛します.

事実 B.1（レヴィの反転定理）． 同じ特性関数をもつ確率変数X, Yは同分布（同じ確率分布）をもつ.

付録 C　ここでは，いわゆる極限定理と呼ばれる確率変数の漸近的な挙動を表す命題のクラスのうち実用上も理論上も最も重要な中心極限定理の証明を与えます．

定義 C.1.（特性関数）． Xを確率変数とする．一変数関数

$$\psi_X(t) := E\left[e^{itX}\right] = \begin{cases} \sum_i e^{itx_i} P(X = x_i) & X\text{が離散型のとき} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx & X\text{が連続型のとき} \end{cases} \qquad (C.1.1)$$

を$\boldsymbol{X}$**の特性関数**と呼ぶ．

例 C.1.　$X \sim B(n,p)$（二項分布）のとき，

$$\psi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{it}p\right)^k (1-p)^{n-k} = \left(e^{it}p + (1-p)\right)^n.$$

例 C.2. $X \sim N(0,1^2)$（標準正規分布）のとき，

$$\psi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2} - \frac{t^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

注 C.1.　同じ特性関数をもつ確率変数X, Yは同分布（同じ確率分布）をもつことが知られています**（レヴィの反転定理）**．それは，X, Yがともに連続型 r.v.の場合には，同じ密度関数をもつということです．

さて，母平均μ,母分散σ^2の母集団からランダムサンプル$X_1, X_2, \ldots, X_n$をとります．すなわち，X_i達は独立で，同じ確率分布に従っていると仮定します．これらの確率変数を**正規化**したもの

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

も独立で，同分布に従い，

$$E[Z_1] = \cdots = E[Z_n] = 0, \qquad V[Z_1] = \cdots = V[Z_n] = 1^2 \qquad (C.1.2)$$

が成り立ちます（なぜ？）．

以上の設定のもとで，定理 5.2 よりも少し弱い次の命題を証明しましょう．

定理 C.1.（中心極限定理）． $E[\,|Z_1|^3\,] < \infty$であると仮定する．このとき，

$$\frac{\bar{Z}}{\sqrt{n}} \sim N(0,1^2) \quad (n \to \infty)$$

証明. 注 C.1 および例 C.2 より，$Y:=\bar{Z}/\sqrt{n}$の特性関数$\psi_Y(t)$が$e^{-\frac{t^2}{2}}$に等しいことを示せばよい．はじめに，

$$\psi_Y(t)=E\left[e^{\frac{it}{\sqrt{n}}\sum_j Z_j}\right]$$

$$=\prod_{j=1}^{n}E\left[e^{\frac{it}{\sqrt{n}}Z_j}\right]\quad（\because\ Z_1,Z_2,\dots,Z_n\text{の独立性}）$$

$$=\left(\psi_{Z_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n.\ （Z_1,Z_2,\dots,Z_n\text{の同分布性}）$$

が成り立つことに注意しよう．マクローリンの定理を用いて$e^{iw}=1+iw-\frac{w^2}{2!}+R_3$（$R_3$は 3 次剰余項）．すると，

$$\psi_Y(t)=\left(E\left[1+\frac{it}{\sqrt{n}}Z_1-\frac{t^2}{2n}Z_1^2+R_3\right]\right)^n$$

$$=\left(E[1]+\frac{it}{\sqrt{n}}E[Z_1]-\frac{t^2}{2n}E[Z_1^2]+E[R_3]\right)^n$$

$$=\left(1-\frac{t^2}{2n}+E[R_3]\right)^n \qquad (C.1.3)$$

となる．ここで，二つ目の等号は期待値の「線形性」（詳細は次章で），三つ目の等号は$(C.1.2)$による．仮定より$E[\,|Z_1|^3\,]<\infty$であるから，

$$E[\,|R_3|\,]=E\left[\left|-\frac{it^3e^{\xi}}{3!\,n\sqrt{n}}\right|\right]\qquad \left(0<|\xi|<\left|it/\sqrt{n}\right|\right)$$

であり，$n\to\infty$のとき 0 に収束する．ゆえに$(C.1.3)$右辺は$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t^2}{2n}\right)^n=e^{-\frac{t^2}{2}}$に収束する．

Q.E.D.

付録 D　「当選確実」のカラクリ

我が国で選挙権のあるすべての人の集合を母集団として，n人のランダムサンプル$X_1, \ldots, X_n$を選びます．i番目の人が候補者 X に票を入れたら$X_i = 1$，そうでなければ$X_i = 0$とおきます．ここで

$$p = \frac{（母集団の中で候補者\text{ X }に票を入れた人数）}{（母集団の数）},$$

すなわち$P(X_i = 1) = p$とおきます．すると，$\mu_{X_i} = p,\quad \sigma_{X_i}^2 = p(1-p)$となって，

$$E[\bar{X}] = p,\quad V[\bar{X}] = \frac{p(1-p)}{n}.$$

ゆえに，中心極限定理（定理 5.2）より，サンプル数nが十分大ならば近似的に

$$\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0, 1^2).$$

さて，投票数 1 万票のうち 100 票を開票して(開票率 1%として)，標本平均の実測値

$$\bar{x} = \frac{（n人の中で候補者\text{ X }に票を入れた人数）}{n}$$

を計算した結果，$\bar{x} = \frac{60}{100} = 0.6$を得たとします．$\bar{X}$が$p$の**一致推定量**，すなわち任意の正数$\epsilon$に対して

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X} - p| < \epsilon) = 1$$

を満たす推定量であることから（文献[稲垣 2014, p.99]参照），実は$(\bar{X} - p)/\sqrt{p(1-p)/n}$の代わりに

$$\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})/n}}$$

を考えれば十分になります．

例えば信頼度 95%で（5%の確率で予測が外れることを許容して）候補者 X の当選確率を

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})/n}}\right| < 1.96\right) = 0.95$$

を求めてみましょう．理論上，上式に$\bar{x} = 0.6$，$n = 100$を代入すると，信頼度 95%で

$$-1.96 < \frac{0.6 - p}{\sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{100}}} < 1.96 \quad \Leftrightarrow \quad 0.6 - 1.96\sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{100}} < p < 0.6 + 1.96\sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{100}}$$

となるはずです．これは，$\sqrt{24} \fallingdotseq 4.9$とすると，信頼度 95%で

$$0.504 = 0.6 - 0.096 < p < 0.6 + 0.096 = 0.696$$

となることを意味します．95%という高い信頼度で，候補者 X が 50%以上の確率で当選することがわかりました．

付録 E（フィッシャー・コクランの定理）

定理 E.1.（フィッシャー・コクランの定理）． $X_1, \dots, X_n \sim N(0, \sigma^2)$を独立な確率変数とする．$A_0, A_1, \dots, A_k$を$\sum_{i=1}^{k} A_i = A_0$を満たす$n$次実対称行列とする．

$$n_i = \mathrm{rank}\, A_i, \qquad Q_i = \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{X}A_i\mathbf{X}^{\mathrm{T}}, \qquad i = 0,1,\dots,k$$

とする．ただし，$\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$とし，$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$で$\mathbf{X}$の転置を表す．このとき次は同値である．

(1) 各iについて$Q_i \sim \chi^2_{n_i}$，かつ$Q_0, Q_1, \dots, Q_k$は独立．

(2) 各iについて$A_i^2 = A_i$．

フィッシャー・コクランの定理の証明には線形代数学（特に射影行列）の知識が必要です．興味のある人は文献[伊東 1991]を参照してください．

$(n, \mu) = (2, 0)$の場合にフィッシャー・コクランの定理を使って定理 6.1(2)を証明しましょう．まず，

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{2}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{\sigma^2}\left\{\left(X_1 - \frac{X_1 + X_2}{2}\right)^2 + \left(X_2 - \frac{X_1 + X_2}{2}\right)^2\right\} = \frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{X_1 - X_2}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{\sigma^2}(X_1, X_2)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

のように左辺を変形します．最後の表現は線形代数学で言うところの「二次形式」です（文献[佐武 2015]参照）．

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

とおくと，いずれも対称冪等行列であり，

$$\mathrm{rank}\, A_0 = 2, \qquad \mathrm{rank}\, A_1 = 1, \qquad \mathrm{rank}\, A_2 = 1$$

が成り立ちます．定理 6.2(2)の条件が満たされたので，

$$Q_0 = \frac{1}{\sigma^2}(X_1^2 + X_2^2) \sim \chi_2^2, \quad Q_1 = \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi_1^2, \quad Q_2 = \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right)^2 \sim \chi_1^2 \qquad (E.1.1)$$

となることがわかりました．特にことに注意すると，定理 6.1 (2)が得られます．

$$Q_1 = \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{2}(X_i - \bar{X})^2$$

参考文献

[伊東 1991] 伊東 由文．数理統計学の基礎．サイエンスハウス．1991.

[佐武 2015] 佐武 一郎．線型代数学 増補改題（数学選書 1）．裳華房．2015.