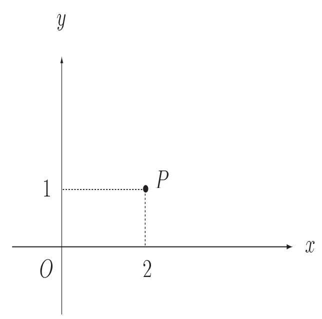
線形代数入門２　自習用補助教材

自宅待機などの諸事情により, 授業に出席できない場合は, この補助教材と教科書を利用して自習を進めて下さい. これは数学教育部会が提供する補助教材です. 自分が受講している授業の担当教員から自習用の補助教材が提供された場合は, そちらを利用して下さい.

線形代数入門２　目次

第１回　線形変換の定義と基本性質

最も簡単な平面上の図形は「点」です。平面上の点の位置は、座標を用いて表すことができます。



例えば、図の点 P の位置は

$$\mathrm{P}(x, y) = (2, 1)$$

のように表すことができます。座標は横書きでなく、縦書きにすることもあります。

$$\mathrm{P}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

また、平面上の点は、位置ベクトルとして表現されることも多いです。例えば、上の例では、

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のように表されます。座標やベクトルの成分は、横書きと縦書きのどちらを利用してもよいのですが、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

などのように、具体的な計算を行うときはすべて縦書きとします。

この教科書でもそうなのですが、ベクトルは $\vec{a}, \vec{b}, \cdots$, よりも、太文字で

$$\boldsymbol{a}, \ \ \boldsymbol{b}, \ \ \cdots,$$

のように表されることのほうが多いです。例えば、

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

のように表します。また、零ベクトルは

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で表されます。

行列 A が表す（平面上の）線形変換 f とは，点 (x, y) を縦ベクトル $\boldsymbol{p}$ で書いて、$\boldsymbol{p}$ に $A\boldsymbol{p}$ を対応させることです．つまり、f によって点 (x, y) が点 (x', y') に写されるとき、点 (x', y') を縦ベクトル $\boldsymbol{p}'$ で書いて、$\boldsymbol{p}' = f(\boldsymbol{p})$ を $\boldsymbol{p}' = A\boldsymbol{p}$ のように考えます。ベクトル $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{p}'$ および行列 A が

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ \ \boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \ \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

で与えられていれば

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

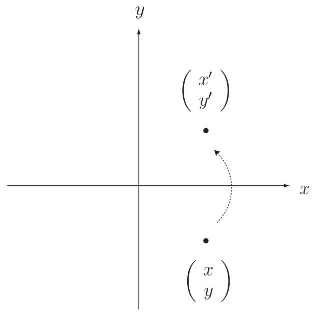
のように表して具体的な計算を行うことができます。

例えば、図のように、平面上の点 (x, y) を x 軸に関して対称な点 (x', y') に移す変換 $f : (x, y) \ \longrightarrow \ (x', y')$ は、

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

で与えられます。これは、行列を用いると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



のように表されるので、平面上の点 (x, y) を x 軸に関して対称な点 (x', y') に移す変換 f は、行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

が表す線形変換です。

f が線形変換であるとき

$$f(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) = f(\boldsymbol{p}) + f(\boldsymbol{p}), \quad f(k\boldsymbol{p}) = kf(\boldsymbol{p}) \qquad (k \text{ は実数})$$

が成り立つことをしっかりおさえておきましょう.

教科書 p.116 から p.123 までを読んで，対応する問いと p.130 の練習問題 1-A の 1,2,3 を解きましょう.

<u>第 2 回　合成変換と逆変換</u>

線形変換 f と g が行列 A と B で表されるとき，合成変換 $g \circ f$ は BA で，逆変換 f^{-1} は A^{-1} で表されることを理解しましょう。

２つの線形変換 f, g がそれぞれ

$$f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad g: \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

で与えられているとき、平面上の点 (x, y) を f で点 (x', y') に移した後、引き続いて点 (x', y') を g で点 (x'', y'') に移してみましょう。

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = BA \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ですから、点 (x, y) は線形変換

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = BA \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって点 (x'', y'') に移されます。この変換を f と g の合成変換といい、$g \circ f$ で表します。先に行う変換 f を $\circ$ の右側に書くことに注意しましょう。合成変換 $g \circ f$ を表す行列は、BA です。

一般に、与えられた変換に対して、逆に行う（あるいは元に戻す）変換を逆変換といいます。線形変換 f が

$$f:\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で与えられているとします。いま、A が逆行列 A^{-1} をもち、A^{-1} が表す線形変換を f^{-1} と書くことにしましょう。このとき、f と f^{-1} の合成変換 $f^{-1} \circ f$ を考えてみます。

$$f^{-1}:\ \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1}\Bigl(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\Bigr) = A^{-1}A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であり、点 (x'', y'') は点 (x, y) と一致することがわかります。したがって、合成変換 $f^{-1} \circ f$ によって、点 (x, y) は点 (x, y) に移されることになります。このことは、f によって移された点は f^{-1} によって元の点に戻されるということを意味しています。つまり、f の逆変換は f^{-1} であるということです。

教科書 p.124 から p.126 までを読んで，対応する問いと p.130 の練習問題 1-A の 4 を解きましょう.

第 3 回　回転を表す線形変換

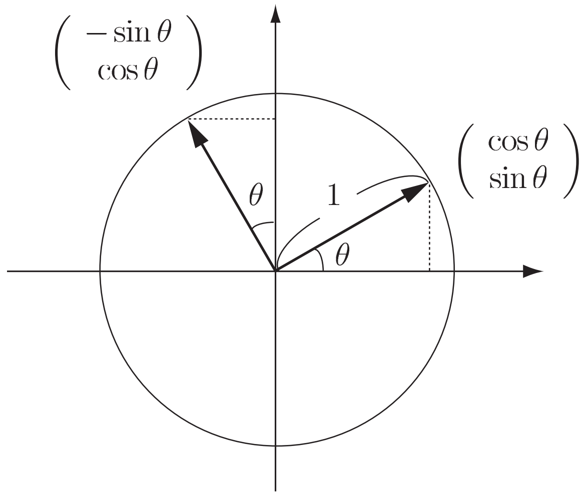
原点を中心とする回転が表す線形変換と，対応する行列についてしっかり理解しておきましょう.

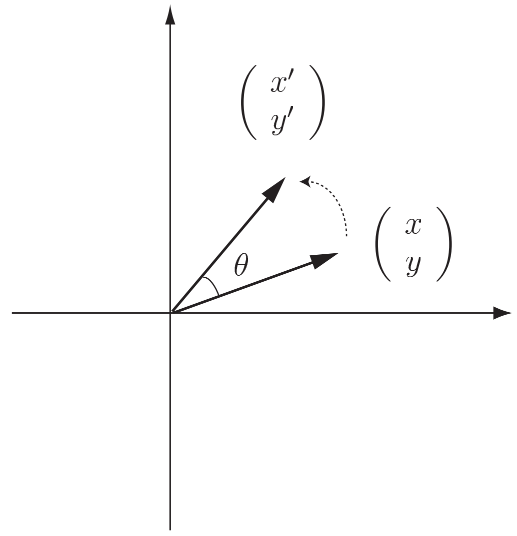
平面上の点 (x, y) を原点のまわりに角度 θ 回転させる線形変換を考えてみましょう。図からわかるように、点 $(1, 0)$ は点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ へ、点 $(0, 1)$ は点 $(-\sin\theta, \cos\theta)$ に移されます。よって、求める線形変換を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$





が成り立ちます。これより、

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

です。したがって、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が原点のまわりの角 θ 回転を表す線形変換であることがわかります。

教科書 p.126 と p.127 を読んで，対応する問いと p.130 の練習問題 1-A の 5 を解きましょう．余力があれば、教科書の p.128 と p.129 の「直交行列と直交変換」を読んで、対応する問いと p.130 の練習問題 1-A の 6 を解きましょう．

第 4 回　固有値と固有ベクトル

正方行列 A に対し，

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

をみたすベクトル $\boldsymbol{v}\,(\neq \boldsymbol{0})$ と実数 λ が存在するとき，λ を A の固有値，$\boldsymbol{v}$ を λ に対応する固有ベクトルといいます．直観的には、固有ベクトルとは A で写しても方向の変わらないベクトルであり、固有値とはそのベクトルを何倍に拡大・縮小するのかという倍率を表します。

行列の固有値と固有ベクトルの求め方はとても大切です。最初に、固有値と固有ベクトルの素朴な（高校数学の範囲の）求め方を具体例を通して説明します。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めてみましょう。

$A\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}=(x,y)$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ですから

$$(1) \qquad \begin{cases} (3-\lambda)x+2y=0 \\ x+(4-\lambda)y=0 \end{cases}$$

です。(1) の第 2 式より

$$(2) \quad x=-(4-\lambda)y$$

ですから、これを (1) の第 1 式へ代入して

$$-(3-\lambda)(4-\lambda)y+2y=0 \quad \therefore \quad \{\,(3-\lambda)(4-\lambda)-2\,\}y=0$$

となります。ここで、もしも $y=0$ と仮定すると (2) より $x=0$ ですから、$x=y=0$ となります。よって、$y\neq 0$ でなければなりません。そのためには、

$$(3) \quad (3-\lambda)(4-\lambda)-2=0$$

が成り立つことが必要です。この 2 次方程式 (3) を解いて、$\lambda=2$ と $\lambda=5$ であることがわかります。$\lambda=2$ のとき、(2) より $x=-2y$ です。よって、(1) の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\ s \text{ は任意 })$$

です。$\lambda=5$ のときも同様にして、$x=y$ ですから、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\ t \text{ は任意 })$$

となります。したがって、A の固有値は $\lambda_1=2$ と $\lambda_2=5$ で、対応する固有ベクトル（の 1 つ）は、それぞれ $\boldsymbol{v}_1=(-2,1)$ と $\boldsymbol{v}_2=(1,1)$ であることがわかります。

このようにして、行列 A の固有値と固有ベクトルを求めることができましたが、行列 A の固有値を求めるには、2 次方程式 (3) を解かなければならないことがわかります。実は、(3) は

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)\cdot(4-\lambda)-2\cdot 1=0$$

で与えられています。これを行列 A の固有方程式といいます。固有ベクトルについては、固有方程式を解いて得られた λ に対して

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

すなわち、

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$$

を解いて求めることができます。

次に、標準的な方法で、行列

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めてみましょう。A の固有値と固有ベクトルは、$A\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$ すなわち、

$$(1) \qquad (A-\lambda E)\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$$

をみたします。いま、もしも $\det(A-\lambda E)\neq 0$ であると仮定すると、$A-\lambda E$ は逆行列をもちます。よって、$(A-\lambda E)^{-1}$ を (1) の両辺に左側から掛けると

$$\boldsymbol{v}=(A-\lambda E)^{-1}\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

となります。これは、$\boldsymbol{v}\neq\mathbf{0}$ に反しています。したがって、

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0$$

でなければなりません。これより、$\lambda^2-6\lambda+5=0$ です。これを解くと、$\lambda=1$ と $\lambda=5$ であることがわかります。$\lambda=1$ のとき、$(A-\lambda E)\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ より

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

です。これより $x+y=0$ となります。よって、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (\ t\ \text{は任意}\ )$$

です。同様に、$\lambda=5$ のとき $(A-\lambda E)\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ より

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

です。これより $3x-y=0$ となります。よって、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (\ s\ \text{は任意}\ )$$

です。以上より、A の固有値は $\lambda_1=1$ と $\lambda_2=5$ で、対応する固有ベクトル（の 1 つ）は、それぞれ $\boldsymbol{v}_1=(1,-1)$ と $\boldsymbol{v}_2=(1,3)$ であることがわかります。

３次正方行列の固有値と固有ベクトルも同様にして求めることができます。余力があれば、３次正方行列の場合にも取り組んでみましょう。

教科書 p.132 から p.135 までを読んで，対応する問いと p.153 の練習問題 2-A の 1 を解きましょう.

第５回　行列の対角化

固有値と固有ベクトルを使うと，正方行列を対角化することができます。ここでは、２次正方行列を通して、行列の対角化を理解しましょう。

第４回で扱った行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

の固有値は $\lambda_1 = 2$ と $\lambda_2 = 5$ で、対応する固有ベクトルは、それぞれ $\boldsymbol{v}_1 = (-2, 1)$ と $\boldsymbol{v}_2 = (1, 1)$ でした。このとき、

$$A\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1, \qquad A\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{v}_2$$

が成り立ちます。これは、ひとまとめにして

$$\begin{aligned} (\, A\boldsymbol{v}_1 \;\; A\boldsymbol{v}_2 \,) &= (\, \lambda_1\boldsymbol{v}_1 \;\; \lambda_2\boldsymbol{v}_2 \,) \\ \therefore \quad A(\, \boldsymbol{v}_1 \;\; \boldsymbol{v}_2 \,) &= (\, \lambda_1\boldsymbol{v}_1 \;\; \lambda_2\boldsymbol{v}_2 \,) \end{aligned}$$

のように書くことができます。ところで、簡単な計算により、上式の右辺は

$$(\, \lambda_1\boldsymbol{v}_1 \;\; \lambda_2\boldsymbol{v}_2 \,) = (\, \boldsymbol{v}_1 \;\; \boldsymbol{v}_2 \,) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

のように書き直せることがわかるので、

$$A(\, \boldsymbol{v}_1 \;\; \boldsymbol{v}_2 \,) = (\, \boldsymbol{v}_1 \;\; \boldsymbol{v}_2 \,) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

となります。よって、

$$P = (\, \boldsymbol{v}_1 \;\; \boldsymbol{v}_2 \,) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば、

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

です。この両辺に左から P^{-1} を掛けると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

すなわち、

$$P^{-1}AP = D, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

となります。これを行列 A の対角化といいます。

行列はいつも対角化できるとは限りません。２次正方行列の場合は、行列が異なる２つの固有値をもてば対角化可能です。

３次正方行列の対角化も同様です。余力があれば、３次正方行列の場合にも取り組んでみましょう。

教科書 p.139 から p.140 の例題４まで読んで，対応する問いと p.153 の練習問題 2-A の 3(1),(2) を解きましょう．余力があれば、教科書の p.144 から p.147 の「対称行列の直交行列による対角化」を読んで、対応する問いと p.130 の練習問題 2-A の 4(1) を解きましょう．

第６回　対角化の応用

行列の対角化を用いた応用はいろいろあるのですが、ここでは行列の n 乗計算について説明します。余力があれば、直交行列と直交変換（教科書 p.128〜p.129）と対称行列の直交行列による対角化（教科書 p.144〜p.147）を理解した上で、２次形式の標準化（教科書 p.148〜p.150）にも取り組んでみて下さい。

第５回で扱った行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

の n 乗 A^n を求めてみましょう。何も考えず、単純に計算してみると

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}$$

となり、A^n を計算することはとてもできそうにない気がします。しかし、行列の対角化を利用すると、A^n が計算できるのです。

第５回で説明したように、

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば、$AP = PD$ すなわち、

$$P^{-1}AP = D, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

が成り立ちます。この式の両辺を n 乗してみましょう。簡単な計算により

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}APP^{-1}AP \cdots P^{-1}AP = P^{-1}A^nP$$

および

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

が成り立つことがわかるので、

$$P^{-1}A^nP = D^n, \quad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

となります。よって、$P^{-1}A^nP = D^n$ の両辺に左から P を、右から P^{-1} を掛けると

$$PP^{-1}A^nPP^{-1} = PD^nP^{-1} \qquad \therefore \quad A^n = PD^nP^{-1}$$

となります。逆行列の公式より

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ですから、

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{n+1}+5^n & -2^{n+1}+2\cdot 5^n \\ -2^n+5^n & 2^n+2\cdot 5^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であることがわかります。

教科書 p.151 を読んで，対応する問いと p.153 の練習問題 2-A の 6 を解きましょう.

第 7 回　まとめ（総合的な問題演習）

これまで学修した内容をしっかり復習しましょう．問題を解いて計算力をつけましょう．