線形代数入門１　自習用補助教材

自宅待機などの諸事情により, 授業に出席できない場合は, この補助教材と教科書を利用して自習を進めて下さい. これは数学教育部会が提供する補助教材です. 自分が受講している授業の担当教員から自習用の補助教材が提供された場合は, そちらを利用して下さい.

線形代数入門１　目次

第１回　行列の定義と和

まずは行列とは何かを理解して，新しく出てきた言葉 (対角行列など) の意味を学びましょう．次に，足し算や引き算ができるようになりましょう．

図のように「数」を並べたものを行列といいます.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

行列は大文字のアルファベットで表すことが多いです.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

行列において, 横の並びを行といい, 上から順に第１行, 第２行といいます. 例えば,

$$(1 \;\; 2)\,, \quad (3 \;\; 4)$$

は, A の第 1 行, 第 2 行です. 同様に, 縦の並びを列といい, 左から順に第 1 列, 第 2 列といいます. 例えば,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

は, A の第 1 列, 第 2 列です. 行, 列のことを, それぞれ行ベクトル, 列ベクトルということもあります. 上の 2 つの行列は, 2 つの行と 2 つの列からなる行列です. このような行列を 2×2 行列, または, 2 次正方行列といいます.

行列を構成する要素を成分といいます. 例えば, A の 1 行 2 列目の数 2 を A の $(1, 2)$ 成分といいます. 同様に, B の $(2, 2)$ 成分は 1 です.

さて, 2 次正方行列は

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

のように表されることも多いです. この行列 A の各成分を c 倍して得られる行列を

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{pmatrix}$$

のように定義します. また, 2 つの行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

の和 $A + B$ を

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

で定義します. 例えば,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して,

$$2A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 + 1 & 1 + 2 \\ 3 + (-1) & 4 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

となります．このように, 行列は「数」を「縦」と「横」に並べたものであり, ベクトルと同様に計算することができます．ベクトルも「数」を並べたものですが, (横) ベクトルの場合は,

$$(-1,\ 2,\ 3)$$

のように, 数と数の間をカンマ ， で区切ります．しかし, 行列の場合は数と数の間をカンマで区切りません．教科書 p.47 から p.52 までを読んで，対応する問いと p.66 の練習問題 1-A の 1,2 を解きましょう．

第 2 回　行列の積

行列の掛け算は少し難しいですが，しっかりマスターしましょう．特に，行列の掛け算は掛ける順番が違うと値も違ってきます．具体的な問題に取り組みながら，このことを確かめましょう．

２つの行列

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

の積 AB を

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

で定義します．これは次のように計算するとわかりやすいでしょう．例えば,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して,

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \quad 1 \quad & \quad 2 \quad \\ \quad -1 \quad & \quad 1 \quad \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot(-1) & 2\cdot 2+1\cdot 1 \\ 3\cdot 1+4\cdot(-1) & 3\cdot 2+4\cdot 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

であるから,

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$$

つまり, A の行ベクトルと B の列ベクトルの内積を計算すればよいということです．

行列の積については, 一般に $AB = BA$ は成立しません. 実際, 上の例の A と B に対して,

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

なので, $AB \neq BA$ となります.

教科書 p.53 から p.61 までを読んで，対応する問いと p.66 の練習問題 1-A の 3 を解きましょう．行列の掛け算はひたすら計算問題を解いて慣れることが大切です．どんどん問題を解いていきましょう．

第 3 回　逆行列

初めに逆行列の意味 (定義) を理解しましょう．２次の行列の逆行列の公式を覚えて使えるようになりましょう．

普通の数と同様に, 行列についても,「０」と「１」の役割をする特別な行列があります.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のように, すべての成分が 0 であるような行列を「ゼロ行列」といいます. 行列にゼロ行列を加えたり引いたりしても, 行列は変わらないのは明らかです. また,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のように, 左上から右下へのななめ対角線上の成分が 1 で他の成分がすべて 0 である正方行列を「単位行列」といいます. この教科書では, 単位行列を E で表します. 行列に単位行列を左側からかけても右側からかけても, 行列は変わりません. 実際,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

はすぐに確かめられます. さて, 数の世界には「逆数」という概念があります. 例えば, 2 の逆数は

$$2 \cdot x = x \cdot 2 = 1$$

をみたす x として定義され, それは $\frac{1}{2}$ と書かれます. ２次正方行列についても同

様の概念が定義されます．つまり，２次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対して，$AX = XA = E$ をみたす行列 X を A の逆行列といい，A^{-1} で表します．上の行列 A の逆行列は，$ad - bc \neq 0$ のとき，

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で与えられます．しかし，$ad - bc = 0$ のときは，A の逆行列は存在しません．

教科書 p.62 から p.65 までを読んで，対応する問いと p.66 の練習問題 1-A の 4,5,6 を解きましょう．

第４回　消去法

消去法とよばれる方法を用いて，連立１次方程式を解いてみましょう．まず，最も簡単な次の連立１次方程式

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & 4y & = & 6 \\ 3x & + & 2y & = & 1 \end{array} \right.$$

を考えてみます．この連立１次方程式は，次のようにして解くことができます．最初に第１式を２で割り

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 3 \\ 3x & + & 2y & = & 1 \end{array} \right.$$

となります．この操作により，第１式の変数 x の係数を１にします．次に，第１式を３倍して第２式から引くと

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 3 \\ & & -4y & = & -8 \end{array} \right.$$

となります．この操作により，第２式から変数 x が消去されます．第２式を -4 で割ると，

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 3 \\ & & y & = & 2 \end{array} \right.$$

となります．この操作によって，第２式の変数 y の係数が１になります．第２式を２倍して第１式からひくと，

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & = & -1 \\ & & y & = & 2 \end{array} \right.$$

となります. 以上の操作をまとめると, 次のようになります.

(1) 第 1 式の変数 x の係数を 1 にする.
(2) 第 1 式を利用して, 他の式から変数 x を消去する.
(3) 第 2 式の変数 y の係数を 1 にする.
(4) 第 2 式を利用して, 他の式から変数 y を消去する.

この操作は, 変数や式の個数がもっと多いケースであっても適用できる一般的なものです. これが消去法（掃き出し法）よばれる計算方法の基本です.

次に, 3 変数の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x + 4y - 3z = -3 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

を解いてみましょう. 先に述べた例を参考にすれば, 第 1 式を 3 で割り,

$$\begin{cases} x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{1}{3} \\ x + 4y - 3z = -3 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

としたいところです. しかし, これでは式の中に分数が現れて以後の計算でミスが生じやすくなります. そこで, このケースでは第 1 式と第 2 式を交換します.

(1) 第 1 式と第 2 式を交換して, 第 1 式の x の係数を 1 にする.
(2) 第 2 式 $-$ 第 1 式 $\times 3$, 第 3 式 $-$ 第 1 式 $\times 2$ より第 2 式と第 3 式から x を消去.
(3) 第 2 式 $\div(-10)$ より第 2 式の y の係数を 1 にする.
(4) 第 1 式 $-$ 第 2 式 $\times 4$, 第 3 式 $-$ 第 3 式 $\times(-5)$ より第 1 式と第 3 式から y を消去.
(5) 第 3 式 $\div 3$ より第 3 式の z の係数を 1 にする.
(6) 第 1 式 $-$ 第 3 式, 第 2 式 $-$ 第 3 式 $\times(-1)$ より第 1 式, 第 2 式から z を消去.

という操作を行ってみましょう.

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
3x & + & 2y & + & z & = & 1 \\
x & + & 4y & - & 3z & = & -3 \\
2x & + & 3y & + & 2z & = & 5
\end{array}
$$

$\downarrow$ (1)

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & 4y & - & 3z & = & -3 \\
3x & + & 2y & + & z & = & 1 \\
2x & + & 3y & + & 2z & = & 5
\end{array}
$$

$\downarrow$ (2)

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & 4y & - & 3z & = & -3 \\
 & - & 10y & + & 10z & = & 10 \\
 & - & 5y & + & 8z & = & 11
\end{array}
$$

$\downarrow$ (3)

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & 4y & - & 3z & = & -3 \\
 & & y & - & z & = & -1 \\
 & - & 5y & + & 8z & = & 11
\end{array}
$$

$\downarrow$ (4)

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x & & & + & z & = & 1 \\
 & & y & - & z & = & -1 \\
 & & & & 3z & = & 6
\end{array}
$$

$\downarrow$ (5)

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x & & & + & z & = & 1 \\
 & & y & - & z & = & -1 \\
 & & & & z & = & 2
\end{array}
$$

$\downarrow$ (6)

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x & & & & & = & -1 \\
 & & y & & & = & 1 \\
 & & & & z & = & 2
\end{array}
$$

x	y	z	
3	2	1	1
1	4	-3	-3
2	3	2	5
1	4	-3	-3
3	2	1	1
2	3	2	5
1	4	-3	-3
0	-10	10	10
0	-5	8	11
1	4	-3	-3
0	1	-1	-1
0	-5	8	11
1	0	1	1
0	1	-1	-1
0	0	3	6
1	0	1	1
0	1	-1	-1
0	0	1	2
1	0	0	-1
0	1	0	1
0	0	1	2

以上より, $x=-1,\ y=1,\ z=2$ であることがわかります.

消去法（掃き出し法）を用いて実際に計算を行うときは, 上の右側の表のように書くと便利で速いです. この表を見れば, 消去法（掃き出し法）とは, 連立 1 次方程式の変数 x, y, z の係数からなる行列を単位行列に変形していく操作であることがわかるでしょう.

教科書 p.68 から p.72 までを読んで，対応する問いと p.80 の練習問題 2-A の 1 と 2(1) を解きましょう.

第5回　逆行列と連立1次方程式

ここでは，第3回で学んだ方法とは別の方法で逆行列を求める方法を学びます．行列の階数についても理解しましょう．

A の逆行列とは $AX = E$ をみたす X であると考えて，それを掃き出し法で求めることができます．例えば，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

の場合は，

$$X = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります．これは，2つの連立1次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

つまり，

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 9y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 9y = 1 \end{cases}$$

をそれぞれ解くことと同じになります．この2つの連立方程式を掃き出し法で解けばよいのですが，2つの方程式を別々に2回解くのは面倒です．そこで，

$$\begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cc|c} z & w & \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \end{array}$$

を次のように1つにまとめます．

$$\begin{array}{cc|cc} & & & \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 1 \end{array}$$

あとは, 通常の掃き出し法と同様の操作を行います.

(1) 第 2 行 × 第 1 行 ×3
(2) 第 2 行 ÷3
(3) 第 1 行 − 第 2 行 ×2

1	2	1	0
3	9	0	1
1	2	1	0
0	3	-3	1
1	2	1	0
0	1	-1	$\frac{1}{3}$
1	0	3	$-\frac{2}{3}$
0	1	-1	$\frac{1}{3}$

上の操作によって, 2 つの連立 1 次方程式を同時に解くことができます. このようにして得られた

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

が求める逆行列です.

消去法による連立 1 次方程式を解くときや, 逆行列を求めるときには

(1) 2 つの行を入れ替える.
(2) ある行に 0 でない数を掛ける.
(3) ある行に他の行を定数倍したものを加える.

という 3 つの操作を行います. これらは行基本変形とよばれています. 行基本変形を利用すると, どんな行列であっても,

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & & \cdots & & * \\ 0 & 1 & * & & \cdots & & * \\ 0 & 0 & 1 & & \cdots & & * \\ & & & & \vdots & & \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

のような形の行列（階段行列）に変形することができます. ここで, $*$ は何らかの

適当な数を意味します. 例えば, 行列

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に対しては

(1) 第 2 行 − 第 1 行 ×2, 第 4 行 + 第 1 行
(2) 第 3 行 − 第 2 行, 第 4 行 + 第 2 行
(3) 第 3 行 ÷2

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

のような操作を行うと

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となります. このとき, $\tilde{A}$ に現れた赤字の 1 の個数を A の階数（ランク）といい, $\mathrm{rank}(A)$ もしくは $r(A)$ と表します. この例では, A の階数は 3 です. つまり, $\mathrm{rank}(A)=3$ です.

証明は省略しますが, 次の定理が成り立つことが知られています.

定理　連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

が解をもつための必要十分条件は, 2 つの行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

のランクが同じ, すなわち, $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$ が成り立つことである. A を係数行列, B を拡大係数行列という.

教科書 p.73 から p.79 までを読んで，対応する問いと p.80 の練習問題 2-A の 2(2) と (3),3,4 を解きましょう.

第 6 回　行列式

２次正方行列

$$A \ = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

の行列式を

$$|A| \ = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \ = \ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

と定義します. 行列式は $\det A$ のように表すこともあります. すなわち,

$$\det A \ = |A| = \ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

行列式は連立 1 次方程式と深い関係があります. そのことを見るために, 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = p_1 \\ a_2x + b_2y = p_2 \end{cases}$$

を加減法で解いてみましょう.

$$\begin{array}{rcl} b_2 \cdot a_1 \ x + b_2 \cdot b_1 \ y & = & b_2 \cdot p_1 \\ - \quad b_1 \cdot a_2 \ x + b_1 \cdot b_2 \ y & = & b_1 \cdot p_2 \\ \hline (\ b_2a_1 - b_1a_2 \ ) \ x & = & b_2p_1 - b_1p_2 \end{array}$$

ですから,

$$x \ = \ \frac{p_1b_2 - p_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

となります．同様にして，

$$y \;=\; \frac{a_1p_2 - a_2p_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

となります．この結果を行列式を用いてかくと

$$x \;=\; \frac{\begin{vmatrix} p_1 & b_1 \\ p_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y == \frac{\begin{vmatrix} a_1 & p_1 \\ a_2 & p_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

となります．これをクラメルの公式といいます．

次に，3 次の行列式について考えてみます．これは余力のある人のためのものですから，読み飛ばしてもかまいません．3 変数の連立 1 次方程式

$$(*) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = p_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = p_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = p_3 \end{cases}$$

を加減法で解いてみます．$(*)$ において，第 1 式 $\times\ c_2$ $-$ 第 2 式 $\times\ c_1$ により，z を消去すると，

$$(a_1c_2 - a_2c_1)\,x + (b_1c_2 - b_2c_1)\,y = c_2p_1 - c_1p_2$$

となります．同様に，第 1 式 $\times\ c_3$ $-$ 第 3 式 $\times\ c_1$ により，

$$(a_1c_3 - a_3c_1)\,x + (b_1c_3 - b_3c_1)\,y = c_3p_1 - c_1p_3$$

となります．この 2 式から y を消去すると

$$\begin{aligned} &\{\,(a_1c_2 - a_2c_1)(b_1c_3 - b_3c_1) - (a_1c_3 - a_3c_1)(b_1c_2 - b_2c_1)\,\}x \\ &\quad = (c_2p_1 - c_1p_2)(b_1c_3 - b_3c_1) - (c_3p_1 - c_1p_3)(b_1c_2 - b_2c_1) \end{aligned}$$

となります．（分母が 0 になったりしないものと仮定して）かなり長い計算をすると，

$$x = \frac{p_1b_2c_3 + p_2b_3c_1 + p_3b_1c_2 - p_1b_3c_2 - p_2b_1c_3 - p_3b_2c_1}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1}$$

となります．同様にして，

$$y = \frac{a_1p_2c_3 + a_2p_3c_1 + a_3p_1c_2 - a_1p_3c_2 - a_2p_1c_3 - a_3p_2c_1}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1}$$
$$z = \frac{a_1b_2p_3 + a_2b_3p_1 + a_3b_1p_2 - a_1b_3p_2 - a_2b_1p_3 - a_3b_2p_1}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1}$$

となることがわかります（ひまな人は上の結果が正しいことを確かめてみて下さい）．この結果から，3 次行列

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

の行列式を

$$\det A = |A| = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

のように定義すれば，3 変数の連立 1 次方程式 $(*)$ に関するクラメルの公式

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \color{red}{p_1} & b_1 & c_1 \\ \color{red}{p_2} & b_2 & c_2 \\ \color{red}{p_3} & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \color{red}{p_1} & c_1 \\ a_2 & \color{red}{p_2} & c_2 \\ a_3 & \color{red}{p_3} & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \color{red}{p_1} \\ a_2 & b_2 & \color{red}{p_2} \\ a_3 & b_3 & \color{red}{p_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

が成り立つことがわかります．そういうわけで，3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

の行列式を

$$\begin{aligned} \det A &= |A| \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} \end{aligned}$$

で定義します．この定義は次の図のように覚えておくとよいでしょう．

$$
\begin{array}{ccccc}
a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\
a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31}
\end{array}
$$

例えば,

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

の行列式は次のようにして計算します.

$$
\begin{aligned}
|A| &= 3\cdot(-1)\cdot(-1) + 2\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 1 \\
&\quad -2\cdot(-1)\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 3 - (-1)\cdot 2\cdot 2 \\
&= 3+4+2+2-3+4 = 12
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\
 & -1 & 1 & 2 & \\
2 & 1 & -1 & 2 & 1
\end{array}
$$

これをサルスの方法といいます. これは, 3 次正方行列に対してのみ使えます.

行列式についてはいろいろな性質が成り立つことが知られています. 例えば, 正方行列 A が逆行列をもつための必要十分条件は, A の行列式の値が 0 でないこと, すなわち,

$$
\det A = |A| \neq 0
$$

です. A が 2 次正方行列のときは, この性質を簡単に確かめることができます. ここでは, もう 1 つ, 行列式の積に関する公式を紹介します. n 次正方行列 A と B の積 AB は n 次正方行列になりますが, AB の行列式について次が成り立ちます.

$$
\det(AB) = \det A \cdot \det B
$$

A と B が 2 次正方行列のときは, 上の等式が成り立つことを簡単な計算によって確かめることができます.

教科書 p.82, p.93, p.94 を読んで，対応する問いを解きましょう．

第 7 回　まとめ

これまで学修した内容をしっかり復習しましょう．問題を解いて計算力をつけましょう．