線形代数２
自習用講義ノート

教科書: 三宅敏恒著「線形代数学　初歩からジョルダン標準形へ」培風館

1　第 1 回 正則行列

今回は教科書 p.34 からの 2.4 節「正則行列」の内容を学ぶ.

1.1　正則行列

定義 1.1　A, B を n 次正方行列, すなわち $n \times n$ 行列とする. B が A の**逆行列**とは

$$AB = BA = E_n$$

ということである. ここで E_n は n 次の単位行列である.

逆行列をもつ正方行列を**正則行列**とよぶ.

A の逆行列はあっても 1 つしかない. B, C を A の逆行列とすると

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C.$$

A が正則のとき, A の逆行列を A^{-1} と書く.

B を A の逆行列とすると, 定義から A は B の逆行列になっている. よって, A が正則のとき A^{-1} も正則で

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

教科書では定理 2.4.1 の証明はあとまわしにして, 定理 2.4.2 の証明に利用している. とくに (5) の正則性との同値性の証明で利用しているが, これまでの知識で十分証明ができる.

まず, 行基本変形について, 定義からわかる事実を整理しておく. どの行基本変形も, ある行基本変形を使ってもとにもどせることを思い出してほしい. また, 行基本変形は列ごとの変形なので, 列をまびいたり, 列の順番を入れ換える操作と可換 (施す順番を変えても同じ) である. たとえば, 行基本変形してから 2 列と 4 列を交換しても, 2 列と 4 列を交換してから行基本変形を行っても同じ結果になる.

命題 1.2　A, A', B, B' は行列とする.

(1)　行基本変形の繰り返しにより

$$A \to A'$$

という変形ができたとすると行基本変形の繰り返しにより

$$A' \to A$$

という変形ができる.

(2) A と B が同じ型の行列とする. A と B から同じように列を取り除いてできる行列をそれぞれ A' と B' とする. たとえば, A と B から第 2 列と第 4 列を取り除いた行列をそれぞれ A' と B' とする.
行基本変形の繰り返しにより
$$A \to B$$
という変形ができたとすると同じ行基本変形の繰り返しにより
$$A' \to B'$$
と変形できる.

(3) 行基本変形の繰り返しにより
$$[A \,|\, B] \to [A' \,|\, B']$$
という変形ができたとすると同じ行基本変形の繰り返しにより
$$[B \,|\, A] \to [B' \,|\, A']$$
と変形できる. さらに一般に, 列の並べ替えと行基本変形は, 施す順番を交換しても同じ結果になる.

次の命題は教科書の定理 2.4.2 の (3) $\Rightarrow$ (5) の証明 (p.35) と同様に示せる. (2) $\Rightarrow$ (5) の部分的な証明になっている.

命題 1.3　X を n 次正方行列とする. 行基本変形の繰り返しにより
$$[X \,|\, E_n] \to [E_n \,|\, Y]$$
と変形できるとき, $XY = E_n$ である.

証明
$$E_n = [\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \cdots \boldsymbol{e}_n], \quad Y = [\boldsymbol{y}_1\ \boldsymbol{y}_2\ \cdots \boldsymbol{y}_n]$$
とする. 行基本変形は同じ位置の列をまびいても正しい行基本変形になっている. よって, 各 $i = 1, \ldots, n$ について
$$[X \,|\, \boldsymbol{e}_i] \to [E_n \,|\, \boldsymbol{y}_i]$$
という変形が行基本変形の繰り返しによりできていることになる. すると $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}_i$ が $X\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$ の解になるので, $X\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{e}_i$. よって,

$$XY = X[\boldsymbol{y}_1\ \boldsymbol{y}_2\ \cdots\ \boldsymbol{y}_n] = [X\boldsymbol{y}_1\ X\boldsymbol{y}_2\ \cdots\ X\boldsymbol{y}_n] = [\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \cdots\ \boldsymbol{e}_n] = E_n. \qquad \square$$

次の命題は教科書の定理 2.4.2 の (2) ⇒ (5) である. 教科書の定理 2.4.1 を使わずに証明できる.

命題 1.4　A は n 次正方行列で, A の簡約化が E_n とする. すると A は正則行列である.

証明　仮定から行基本変形の繰り返しにより $A \to E_n$ という変形ができる. この同じ行基本変形により $[A \,|\, E_n]$ を変形して

$$[A \,|\, E_n] \to [E_n \,|\, C]$$

となったとする. すると命題 1.3 より, $AC = E_n$ である.

行基本変形は可逆な変形なので

$$[E_n \,|\, C] \to [A \,|\, E_n]$$

という変形も行基本変形の繰り返しによりできる. これと同じ行基本変形の繰り返しにより,

$$[C \,|\, E_n] \to [E_n \,|\, A]$$

と変形される. すると命題 1.3 より, $CA = E_n$ である. $\square$

定理 1.5　A を n 次正方行列とする. 次の (1)〜(5) は同値である.

(1) $\mathrm{rank}(A) = n$.

(2) A の簡約化は E_n である.

(3) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は任意の n 次の列ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対し, ただ 1 つの解をもつ.

(4) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は自明な解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に限る.

(5) A は正則行列である.

証明　(1) から (4) までの同値性は教科書の通り. 一応, 書いておく.

(1) ⇒ (2). A の簡約化を B とする. B も $n \times n$ 行列. 主成分が 1 の行が n 個ある. すなわちすべての行の主成分は 1. n 列しかないので, $B = E_n$.

(2) ⇒ (3). $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列 $[A \,|\, \boldsymbol{b}]$ の簡約化は $[E_n \,|\, \boldsymbol{b}']$ の形である. よって $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ だけである.

(3) ⇒ (4). $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ とした特別な場合である.

(4) ⇒ (1). 教科書の定理 2.3.3 による. $\mathrm{rank}(A) < n$ とすると解に任意定数が現れ, 非自明解がある.

(2) $\Rightarrow$ (5). 命題 1.4 による.

(5) $\Rightarrow$ (4). $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ とすると, A^{-1} があるので

$$\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{x} = (A^{-1}A)\boldsymbol{x} = A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

すなわち, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は自明な解だけである. □

1.2 逆行列の計算

命題 1.3 と命題 1.4 により, n 次正方行列 A の逆行列は行基本変形により

$$[A \,|\, E_n] \to [E_n \,|\, C]$$

という変形 (簡約化) を行えばわかる. $A^{-1} = C$ である. また, 定理 1.5 より, この変形の途中で $\mathrm{rank}(A) < n$ がわかれば A に逆行列はない.

例 1.6 教科書の例題 2.4.1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

の逆行列を求める.

$[A \,|\, E]$ を簡約化する.

$$\begin{array}{rrr|rrrl}
\hline
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & ② - ① \times 2 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & ② - ① \\
\hline
1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 & ① - ③ \\
0 & -1 & 0 & -3 & 1 & 1 & ② + ③ \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1 & ① + ② \times 2 \\
0 & -1 & 0 & -3 & 1 & 1 & \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1 & \\
0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 & ② \times (-1) \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & \\
\hline
\end{array}$$

最後の右側の行列が A の逆行列である.

次の問は教科書 p.37 問題 2.4 の 4. である. 解答は教科書の巻末にあるので自分でできなかった場合は見てほしい.

問 1.7 A, B を n 次正方行列とする. 次を示せ.

(1) A が正則ならば A^{-1} も正則で $(A^{-1})^{-1} = A$. (これは定義のところで述べた)

(2) A が正則ならば ${}^tA$ も正則で $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

(3) A, B が正則ならば AB も正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

1.3 補足:行基本変形について

逆行列を求める場合に検算に役立つ性質を述べておく.

行基本変形の繰り返しにより

$$[A \,|\, E] \to [A' \,|\, C]$$

と変形できたとすると

$$A' = CA$$

が成り立つ. C がそれまでの行基本変形の繰り返しの操作を表しているのである.

先程の例で次が成り立っている. 計算してみてほしい. 教科書の p.36 の行基本変形はここで述べたものと微妙に異なるけれども同様のことが成り立っている.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&2&1\\3&-1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&1\\1&2&2\end{bmatrix}$$

基本変形を列ベクトルについて考えると成分の 1 次式で表現できるので, 行基本変形はある行列を左からかけることになっている. 行基本変形を表す行列を**基本行列**と呼ぶ. 単位行列にその操作をやってみればその操作を表す基本行列が求まる.

例 1.8 E_3 について, 1 行目を c 倍すると次の F_1, 1 行目と 2 行目を交換すると次の F_2, 1 行目の c 倍を 2 行目に加えると次の F_3 になる.

$$F_1=\begin{bmatrix}c&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad F_2=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad F_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\c&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

そして, 列ベクトルに作用してみると

$$\begin{bmatrix}c&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}cx_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\x_1\\x_3\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1&0&0\\c&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2+cx_1\\x_3\end{bmatrix}.$$

たとえば基本変形を 3 回行って

$$A\to A'$$

と変形されたとすると, ある基本行列 F_1, F_2, F_3 があって

$$A'=F_3(F_2(F_1A))=(F_3F_2F_1)A$$

となる. $F=F_1F_2F_3$ (積) とする. 同じ変形を $[A\,|\,E]$ に施せば

$$F[A\,|\,E]=[FA\,|\,F]$$

でそこまでの変形の仕方を表す行列 $F=F_3F_2F_1$ が右側に現れる.

行基本変形は行基本変形でもとにもどせるので, 基本行列は正則行列である. 正則行列の積は正則行列になるので $[A\,|\,E]$ に行基本変形を繰り返して $[A\,|\,C]$ になったとすると C はいつも正則行列である.

行基本変形によって

$$[A \,|\, E] \to [E \,|\, C]$$

と変形できたとすると

$$E = CA$$

である. C は正則なので C^{-1} がある. C^{-1} を両辺に左からかけると $C^{-1}E = C^{-1}(CA)$. 両辺それぞれ計算して $C^{-1} = A$ を得る. C^{-1} は正則なので A が正則であることもわかる.

2　第 2 回 置換

伝統的な行列式の導入では $\{1,2,3,\dots,n\}$ 上の置換 (n 文字の置換) の符号が使われる. そこで, 第 2 回は教科書に合わせて置換について学ぶ. 置換は n 文字の配置換え (並べ替え) の仕方を表している. どこかでやることになる可能性が高いからここで導入ということが多いが, 行列式の導入に置換の符号は必ずしも必要ではない.

置換の話は群論と呼ばれる数学の 1 分野の入門にもなっているので, 具体例を使って触れておく. 定義は教科書の p.38 からを見てほしい.

$\{1,2,3,4\}$ から $\{1,2,3,4\}$ への 1 対 1 対応 (写像, 関数) を (4 文字の) 置換とよぶ.

さて, 具体的には $\sigma : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

のように表す. この場合は, $\sigma(1)=2, \sigma(2)=3, \sigma(3)=4, \sigma(4)=1$ という意味である. 上下の対応関係なので左右の並びはどうでもよく, 下の段でソートして

$$\sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

でもよい.　横の順番を変えても同じものを表している. 逆の対応 σ^{-1} は上下を入れ替えればいいので,

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

上の段を 1 2 3 4 に固定して下の段だけで表現することもできる. そうすると

$$\sigma = (2\,3\,4\,1)$$

となる. これは $\{1,2,3,4\}$ の順列である. 順列と置換はほぼ同じものと考えてよい. n 文字上の置換は $n!$ 通りある.

置換の積は関数としての合成で定義される. n 文字の置換 σ, τ に対し,

$$(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i)) \quad (i = 1,2,\dots,n)$$

で定義される. $\sigma\sigma$ を σ^2, $\sigma\sigma\sigma$ を σ^3 などと書く.

$$\sigma(i) = i \quad (i = 1,2,\dots,n)$$

という恒等写像は n 文字の置換になっていて, 単位置換と呼ばれる.

$\sigma(1)=4, \sigma(4)=2, \sigma(2)=1, \sigma(i)=i\ (i \neq 1,2,4$ のとき) のような置換 σ を

$$\sigma = (1\ 4\ 2) = (4\ 2\ 1) = (2\ 1\ 4)$$

と表す. このような置換を巡回置換と呼ぶ. 巡回置換のこの表現は巡回させても同じ置換を表す. 3 つの文字を巡回させるので 3 サイクルとも呼ばれる. 1 サイクルは単位置換になる. 2 サイクル $(a\ b)$ は互換と呼ばれる.

σ を n 文字の置換とする. $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ とすると, $\sigma(i)$, $\sigma^2(i)$, $\sigma^3(i)$, $\ldots$ を考えるとこれらは有限集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ の要素なので, いつか同じものが現れる. たとえば $\sigma^3(i)=\sigma^7(i)$ とすると σ^{-1} があるので, $i=\sigma^4(i)$ となることがわかる.

$(1\ 4\ 6)$ と $(2\ 5)$ のように動かす文字に共通なものがないとき, 互いに素なサイクルと呼ぶ.

定理 2.1 n 文字の置換 σ は互いに素なサイクルの積で表現できる. 互いに素なので, これらの積の順番は入れ替えても同じ置換になる. この分解を σ の**サイクル分解**と呼ぶ. 英語では disjoint cycle decomposition.

教科書の例題 3.1.2 で説明する.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 8 & 2 & 1 & 4 & 9 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

まず, 1 から始めると σ でどのように写るか調べる.

$$1 \to 7 \to 9 \to 5 \to 1$$

$\{1,7,9,5\}$ を σ の**軌道**と呼ぶ. これ以外のところから 1 つ文字を選ぶ. たとえば 2 を選ぶ. この 2 がどのように σ で写るか調べる. 2 を含む軌道を求めることになる. すると

$$2 \to 6 \to 4 \to 2$$

さらに, 残っている文字から, たとえば 3 を選び, 3 を含む軌道を求める.

$$3 \to 8 \to 3$$

これですべての軌道がわかった.

$$\sigma = (1\ 7\ 9\ 5)(2\ 6\ 4)(3\ 8)$$

さらに, 巡回置換は互換 (2 サイクル) の積で表現できる.

$$(2\ 6\ 4) = (2\ 4)(2\ 6), \quad (1\ 7\ 9\ 5) = (1\ 5)(1\ 9)(1\ 7)$$

n サイクルは $n-1$ 個の互換の積に分解できる.

定理 2.2　n 文字の置換 σ は互換の積で表現できる. k 個の互換の積と k' 個の互換の積が同じ置換になるとき, k と k' は共に偶数か共に奇数である. すなわち, $k \equiv k' \pmod 2$.

置換 σ が k 個の置換の積で書けるとき, $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^k$ と定義する. k が偶数のとき σ を偶置換, k が奇数のとき σ を奇置換とよぶ.

教科書はこの定理に依存して, 行列式の定義をしている. p.40 の演習問題で, 差積と呼ばれる多項式への作用を利用して上の定理を示している.

次の多項式は 5 変数の差積である.

$$\varDelta = (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)(x_3-x_4)(x_3-x_5)(x_4-x_5)$$

置換 $\sigma = (2\ 4)$ とし, $\sigma\varDelta$ を考える.

σ による作用で影響を受ける因数について考える.

$\sigma(x_2 - x_4) = (x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(4)}) = (x_4 - x_2) = -(x_2 - x_4)$.

ほかの因数はうまく 2 つずつまとめて考えると, σ を作用させても変わらない.

$$\begin{aligned}
\sigma(x_1 - x_2)(x_1 - x_4) &= (x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)})(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(4)}) \\
&= (x_1 - x_4)(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_4). \\
\sigma(x_2 - x_3)(x_3 - x_4) &= (x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(3)})(x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(4)}) \\
&= (x_4 - x_3)(x_3 - x_2) = (x_2 - x_3)(x_3 - x_4). \\
\sigma(x_2 - x_5)(x_4 - x_5) &= (x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(5)})(x_{\sigma(4)} - x_{\sigma(5)}) \\
&= (x_4 - x_5)(x_2 - x_5) = (x_2 - x_5)(x_4 - x_5).
\end{aligned}$$

よって, $\sigma\varDelta = -\varDelta$.

置換 τ が k 個の互換の積で表現されているとすると

$$\tau\varDelta = (-1)^k\varDelta$$

となる. $\tau\varDelta = \varDelta$ のとき τ は偶置換で互換の積で表すとその個数は偶数個になる. $\tau\varDelta = -\varDelta$ のとき τ は奇置換で互換の積で表すとその個数は奇数個になる.

sgn がきちんと定まること, すなわち偶置換と奇置換がうまく定まることを示すには, 他に, 置換に対して転倒数と呼ばれる数を考える方法もある. $i < j$ なのに $\sigma(i) > \sigma(j)$ となる組 $\langle i, j \rangle$ の個数が転倒数である. たとえば

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

については, $\langle 1,2\rangle$, $\langle 1,3\rangle$ の 2 箇所で転倒しているので転倒数は 2 である. たとえば $\sigma(1)=3>2=\sigma(3)$ なので, $\langle 1,3\rangle$ という組で転倒が起きている. 転倒数が偶数になるのが偶置換で, 転倒数が奇数になるのが奇置換である.

補題 2.3　τ が互換 (2 サイクル) のとき, $\sigma\tau$ の転倒数と σ の転倒数の差は奇数である.

例で説明する.

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&6&2&1&4&9&5&3&8\end{pmatrix},\quad \tau=(3\ 7)$$

とする. 互換 $(3\ 7)$ を右からかけると 3 の値と 7 の値が交換される.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&6&\mathbf{2}&1&4&9&\mathbf{5}&3&8\end{pmatrix}(3\ 7)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&6&\mathbf{5}&1&4&9&\mathbf{2}&3&8\end{pmatrix}$$

互換の逆置換はそれ自身なので

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&6&\mathbf{2}&1&4&9&\mathbf{5}&3&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&6&\mathbf{5}&1&4&9&\mathbf{2}&3&8\end{pmatrix}(3\ 7)$$

転倒関係が変化する可能性のある場所 (組) に着目する.

$$\begin{pmatrix}3&7\\\mathbf{2}&\mathbf{5}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&7\\\mathbf{5}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$$

で転倒数は 1 増える. 右から左では転倒数は 1 減る.

$$\begin{pmatrix}3&4&7\\\mathbf{2}&1&\mathbf{5}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&4&7\\\mathbf{5}&1&\mathbf{2}\end{pmatrix}$$

に着目すると, 3 と 4 の組, 4 と 7 の組とも転倒関係に変化はない.

$$\begin{pmatrix}3&5&7\\\mathbf{2}&4&\mathbf{5}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&5&7\\\mathbf{5}&4&\mathbf{2}\end{pmatrix}$$

に着目すると, 3 と 5 の組, 5 と 7 の組とも転倒してる対に変化している. 転倒数は 2 増える. 右から左の場合は転倒数は 2 減る.

$$\begin{pmatrix}3&6&7\\\mathbf{2}&9&\mathbf{5}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&6&7\\\mathbf{5}&9&\mathbf{2}\end{pmatrix}$$

に着目すると, 3 と 6 の組, 6 と 7 の組とも転倒関係に変化はない.

一般の場合もこの 3 つのパターンに場合分けして議論することができる. よって, 互換を右からかけると転倒数の変化は奇数になる.

$(2\,3)$ のように隣り合った数の互換 (隣接互換と呼ぶ) の場合は転倒数はちょうど 1 だけ増えたり減ったりする.

任意の互換は奇数個の隣接互換の積に分解できることが簡単にわかる. たとえば

$$(2\,5) = (4\,5)(3\,4)(2\,3)(3\,4)(4\,5)$$

このことからも偶置換と奇置換の定義がうまくできていることがわかる.

3　第 3 回 行列式の定義と性質 (1)

行列式は正方行列に対して定義される関数で, 成分が実数の場合は正方行列の行ベクトル（列ベクトルでもよい）を辺とする n 次元平行体の n 次元体積 $\times(\pm 1)$ を表していると考えられる. 2 次正方行列の場合は行ベクトル（あるいは列ベクトル）を辺とする平行四辺形の面積, 3 次正方行列の場合は行ベクトル（あるいは列ベクトル）を辺とする平行 6 面体の体積で, 符号を許したものになっている. 1 次元の場合も $\det a = a$ と定義される. これは長さに符号がついていると考えられる. 1 次元の符号は向きを表していると考えられるが, n 次元の場合も行ベクトル (列ベクトル) の並びの向きととらえることができる. 行列式の符号が正のとき, ベクトルの組 (並び) を**右手系**, 負のとき**左手系**と呼ぶ. 2 次元の場合は 1 行目ののベクトルから 2 行目のベクトルへ狭い方で回ると考えると, 正が左回り, 負が右回りと考えられる.

ただし, 実数以外の数でも行列式は定義され, 体積や面積という意味はないけれども有効な概念である. 行列式が 0 でないときその行列は正則で, 行列式が 0 のときその行列は正則でない (退化行列とも呼ばれる).

行列式の 1 つの定義は教科書にある通りで, 性質もそこから導かれる. 置換の符号を使う定義はコンパクトで, 様々な証明も短くて済むという利点はある. しかし, これだけで定義の「気持ち」がわかる人は少ないだろう.

なぜそのような定義にするかという「気持ち」を説明していく. 教科書の定理 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 の性質を得るためにこのように定義していると考えるとよいと思う. 定理 3.2.4 は底面 (底辺) に含まれるベクトルに沿って高さを与える辺の頂点を動かしても, 底面に平行に動くだけなので高さが変わらず平行体の体積が変わらない (等積変形) という意味の定理である. この変形はは行基本変形の 1 つである. 定理 3.2.2 (1) は, 1 つの辺を c 倍すると, 平行体 (平行六面体や平行四辺形) の (符号付き) 体積 (面積) も c 倍されるという意味の定理である. 絶対値をつけて考えれば本当の体積の性質になる.

定理 3.2.1 は, 平行体 (平行四辺形, 平行六面体など) の体積は底面積×高さになるという定理である. 定理 3.2.1 から単位行列の行列式は 1 になる. これは単位正方形の面積は 1, 単位立方体の体積は 1 という意味になる. 上三角行列, あるいは下三角行列の場合は, 対角成分に「高さ」が現れていると見ることができ, 全体の体積は対角成分の積になると考えられる.

置換の符号の性質をよく理解した人は教科書の通りで様々な性質がわかるので, それでよい. ピンと来ないと思った人のために, 別の導入の仕方も示しておく.

置換の符号を使わなくても行列式は定義できる. このルートととると, 行列式の存在と性質から置換の符号の存在 (偶奇が決まること) を導くことができる.

導入の仕方はいろいろあり, いろいろな見方を示す方が理解が深まるであろう.

教科書の 3.4 節で登場する余因子展開という概念がある. 3 次の行列式は, 第 1 列で余因子展開すると 2 次の行列式の 1 次結合で書ける.

例えば次のように定義する.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{21} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

このように定義にすれば, 無理に置換の符号を使わなくても 3 次の行列式が定義でき, 定理 3.2.1〜3.2.4 も証明できる. $n \geq 4$ についても $n-1$ 次の行列式から n 次行列式が定義できて, 定理 3.2.1〜3.2.4 も証明できる.

3.1 平行四辺形の面積

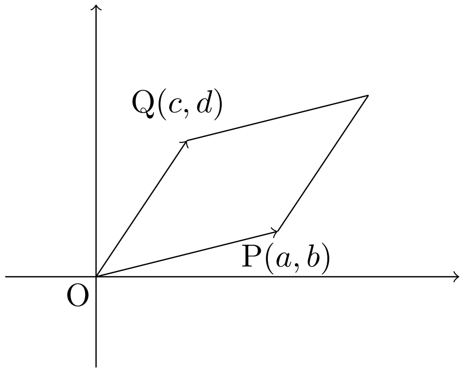
ここでは平行四辺形の面積が 2 次の行列式の絶対値になることを示す.

2 次の正方行列
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
を考える. これは列ベクトルが横に 2 つ並んでいると考えてもよいし, 行ベクトルが縦に 2 つ並んでいると考えてもよい.

しばらく, 行ベクトルが 2 つ並んでいると考えることにする. 列ベクトルの並びと考えてもまったく同じように意味付けができる. 行ベクトルの並びととらえると, 行基本変形との関係がとらえられやすい. 英語では determinant で「決定式」のような意味である. 正方行列が正則かどうかを「決定する」(判定する) ことに使える.

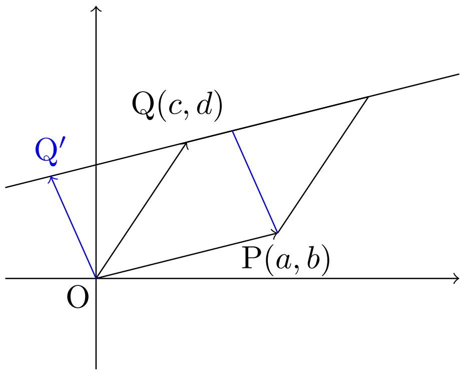
ベクトル $[a\ b]$ と $[c\ d]$ を 2 つの辺とする平行四辺形の面積を求めてみよう. これを行列
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
の「面積」と呼ぶことにする.

まず $a, b, c, d > 0$ で, $d/c > b/a$ と仮定すると次のような図になる.



Q を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ に平行な線に沿って移動しても面積は変わらない. 式で書くと

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ'}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

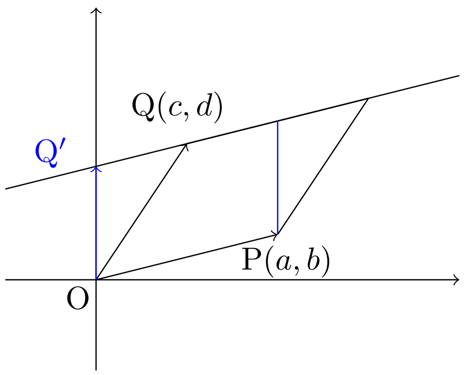


すなわち

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{の「面積」} = \begin{bmatrix} a & b \\ c + ka & d + kb \end{bmatrix} \text{の「面積」}$$

これは行基本変形の 1 つである. Q$'$ が y 軸上に来るようにするには掃き出しと同じ操作をすればよい. 第 2 行 $-$ 第 1 行 $\times$ (c/a) と変形すると

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{の「面積」} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d - (bc/a) \end{bmatrix} \text{の「面積」}$$



Q' の座標は $(0, d-(bc/a))$. すなわち, $\overline{\mathrm{OQ}'}$(長さ) $= d-(bc/a)$. 辺 OQ' に対する平行四辺形の高さは a. よって,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d-(bc/a) \end{bmatrix} \text{の「面積」} = a(d-(bc/a)) = ad-bc.$$

$b/a > d/c$ の場合は $ad-bc$ は負になるので本当の面積ではないが, 行を入れ替えて考えると正の面積が得られ, $bc-ad$ がその値である. $a, b, c, d > 0$ という仮定のもとでは, 考えている平行四辺形の正の面積は $|ad-bc|$ ということになる.

きちんと場合分けしてやると, a, b, c, d の値にかかわらず, いつでも面積は $|ad-bc|$ になる.

回転で面積が変わらないということを認めれば, $a, b > 0$ となるように 2 つの辺を同じ角度だけ回転してやることができる. 1 行目の表す辺が第 1 象限に来るように回転させる. 次に十分大きな数 $k > 0$ をとり,

$$[c'\ d'] = [c\ d] + k[a\ b]$$

とすれば,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

で決まる平行四辺形の面積が $|ad' - bc'|$ になることがわかる. 一方, 計算してみると $ad' - bc' = ad - bc$ である. 回転のところも回転行列を使えばきちんと書け, 計算すると最初の $ad-bc$ と変わらないことがわかる.

行列式は本質的には面積を表す量だが, 行列の成分の多項式で書けていて, 負にもなるものである.

2 次の行列式の具体的な定義は

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

である.

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

と転置しても変わらない. すなわち列ベクトルの並びと思ってもよい. これは教科書の定理 3.3.1 である.

3 次元の平行六面体の体積も行列式の絶対値になることが示せる.

3.2　2 次行列式の性質

改めてこの面積的なものである行列式の性質をいくつか調べる. これから, 2 次正方行列 A の表す平行四辺形の面積が $|\det A|$ になることがわかる. 等積変形で値が変わらないことや, 1 辺を c 倍すると $\det A$ の値も c 倍になることなどから, 直感的に面積と思っているものが求まるのである.

まず, 教科書の定理 3.2.1 から定理 3.2.4 を述べよう. 証明は定義にあてはめて計算すればよい. いずれも面積の性質を表していると考えられる.

まず, 教科書の定理 3.2.1 から始める. これは平行四辺形の面積は底辺 $\times$ 高さであるということである. 教科書では 1 次正方行列の行列式の定義をしていないので, 厳密にはこれは定理 3.2.1 ではない.

定理 3.1 **(底辺 $\times$ 高さ)**

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} \end{bmatrix} = a_{11}a_{21}$$

これは定義からすぐに出るが, 2 行目の y 軸に沿ったベクトルに対し, 平行四辺形の高さは a_{11} なので面積は高さ a_{11} と底辺の長さ a_{21} の積になるという意味である. 座標をそのまま使うので, 負にもなる.

次のは各辺について, 面積は線形性をもつという意味の定理である. 2 次の場合, 辺 (行) が 2 つあるので, 2 重線形性と呼ばれる性質である.

定理 3.2 **(2 重線形性 (各行についての線形性))**　(1) (1 つの辺を c 倍すると「符号付き面積」も c 倍される.)

$$\det \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix} = c\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

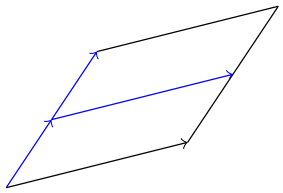
(2) (1 つの辺をベクトル和に分割すると「符号付き面積」も和に分解される.)

$$\det \begin{bmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

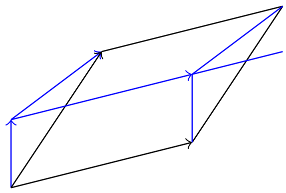
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

(1) は面積のもつ自然な性質である. (2) の幾何学的な意味は少しわかりずらいが, 次の図のように等積変形による分割を考えると納得できると思う. 底辺に対する高さだけが問題なので, 底辺に対する垂線への正射影を考えてもわかると思う.

(1)



(2)



(1) の性質だけでも, 1 辺を同じ方向のベクトル和 $c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{a} = (c_1 + c_2)\boldsymbol{a}$ に分割すると $\det$ は和に分解されることがわかる. (1) は弱い形の線形性と言える.

次の定理は交代性と呼ばれる性質である. (1) の意味は分かりづらいが, (2) は 2 辺が等しければ平行四辺形がつぶれるので面積が 0 という意味である. (1) は (2) と 2 重線形性からも導かれる.

行基本変形の 1 つ「1 つの辺 (行) に別の辺 (行) の c 倍を加える」は等積変形であるが, この変形だけで行の交換が可能である. ただし, このとき片方のベクトルは -1 倍される. これと「1 つの辺 (行) を c 倍すると「符号付き面積」も c 倍」を使うと, (1) の性質も自然に思えてくる.

定理 3.3（交代性） (1) (2 つの行を入れ替えると「符号付き面積」は -1 倍になる)

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$$

(1) (2 つの辺 (行) が同じならつぶれて面積 0)

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} = 0.$$

次の定理は教科書の定理 3.2.4(p.47) である. 底辺 (どちらでもよい) に平行な直線に沿った頂点の移動 (高さ不変の移動) で「符号付き面積」が変わらないという定理である.

定理 3.4（等積性） (1 つの辺 (行) の定数倍を別の辺 (行) に加えても「符号付き面積」は同じ.)

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ca_{11} & a_{22} + ca_{12} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} + ca_{21} & a_{12} + ca_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

3.3 基本変形と行列式と n 次元体積

2 次の行列式の絶対値が平行四辺形の面積になっているという話をした. 3 次正方行列に対し, 各行を辺とする平行六面体の体積を計算しようとすると, 平行四辺形の場合と同様に 3 次の行列式の絶対値として求まる. 成分が複素数など実数でない場合も, 正則性の判定をするための量が行列式であるといえる.

行基本変形は次の 3 種類の変形であった.

(1) 1 つの行を c 倍する. ただし, $c \neq 0$.
(2) 2 つの行を入れ替える.
(3) 1 つの行に他の行の何倍かを加える. (この操作を「等積変形」と呼ぶことにする.)

(2) の行を入れ替える基本変形は (3) と (1) を組み合わせてできる. したがって, (2) は入れておかなくても基本変形の組み合わせでできることになる.

例えば次のような変形で 1 行目と 2 行目が入れ替わる. ただし, 1 つの行は -1 倍になる. 符号を合わせるには行の -1 倍の変形を行えばよい. この変形は行列の大きさに関係なく, どの 2 つの行についても通用する. ここで $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は行ベクトルとする.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}) \\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}) \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix}$$

このことから, 行基本変形を組み合わせてできることは (1) 1 つの行を c 倍する (ただし $c \neq 0$), (3) 1 つの行の c 倍を別の行に加える, の 2 つだけの組み合わせでできる.

2 次正方行列の行を辺 (ベクトル) とする平行四辺形, 3 次正方行列の行を辺 (ベクトル) とする平行六面体はイメージがしやすいと思う. 一般に n 次正方行列の行を辺 (ベクトル) とする平行体というものが考えられる. その体積は次の性質を満たすと考えてよいであろう.

- E_n の表す平行体は n 次元の単位立方体で, その体積は $1^n = 1$.
- A の 1 つの行 (辺) を c 倍すると平行体の体積は $|c|$ 倍になる.
- A の 1 つの行 (辺) に別の行 (辺,「底面」内にある) の c 倍を加えても平行体の体積は変わらない (「底面」がそのままで, 高さが変わらない).

定理 3.5　f, g を n 次正方行列に数を対応させる関数とする. f, g が次の 3 つの性質をもつと仮定する.

(1)　$f(E_n) = g(E_n) = 1$.

(2)　n 次正方行列 A の 1 つの行だけ c 倍したものを A' とすると

$$f(A') = cf(A), \quad g(A') = cg(A).$$

(3)　n 次正方行列 A の 1 つの行の c 倍を別の行に足したものを A'' とすると

$$f(A'') = f(A), \quad g(A'') = g(A).$$

このとき, A を n 次正方行列とすると

$$f(A) = g(A)$$

であり, A が正則のとき $f(A) \neq 0$ で, A が正則でないとき $f(A) = 0$. すなわち,

$$A \text{ が正則} \iff f(A) \neq 0.$$

証明　行基本変形について行の交換の操作は等積変形を何度かして行の -1 倍をすれば得られることから, 行の交換をすると f, g の値は -1 倍になる.

A が正則の場合, A を簡約化すると単位行列 E_n になる. すなわち, E_n に行基本変形を何度か施せば A が得られる. 定理の仮定 (1) から $f(E_n) = g(E_n) = 1$ であり, 定理の仮定 (2), (3) からその途中の行列についての f, g の値も一致する. よって, $f(A) = g(A)$. また, 等積変形では f の値は変わらず, 行の c 倍 $(c \neq 0)$ では f の値は c 倍になるだけなので, $f(A) \neq 0$ である.

A が正則でない場合, A を簡約化すると 0 だけの行を含む行列 B に行基本変形できる. 零ベクトルの 0 倍が零ベクトルなので, $f(B) = 0 \cdot f(B) = 0$ となる. A は B から行基本変形で得られる. 等積変形では f の値は変わらず, 行の c 倍 $(c \neq 0)$ では c 倍になるだけなので, 変形途中の行列の f の値は 0. 特に, $f(A) = 0$ である. □

この定理から, n 次正方行列 A から決まる n 次元平行体の体積が $\det A$ の絶対値になることがわかる.

行列式も $|A|$ と書くことが多い. 絶対値とは意味が違うので, 文脈からそれが行列式なのか絶対値なのかに注意してほしい.

3.4 各行についての線形性, 交代性, 等積性の関係

教科書の定理 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 が「符号付き体積」としての性質としてどう読めるかということと, どれとどれからどれが導かれるかという命題としての関係をまとめておく.

(i) (各行の c 倍と可換) 行 (辺) を c 倍すると「符号つき体積」$\det$ の値は c 倍になる. 教科書の定理 3.2.2 (1) である.

(ii) (各行のベクトル和分割と可換) 教科書の定理 3.2.2 (2) である. 正方行列 A の第 i 行が $\boldsymbol{a}$ で, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}''$ とする. A の第 i 行を $\boldsymbol{a}'$ に置き換えたものを A', A の第 i 行を $\boldsymbol{a}''$ に置き換えたものを A'' とすると,

$$\det(A) = \det(A') + \det(A'').$$

(iii) (交代性 (1)) A の 2 つの行を入れ替えたものを A' とすると

$$\det(A') = -\det(A)$$

これは教科書の定理 3.2.3 (1).

(iv) (交代性 (2)) A の 2 つの行が一致していると $\det(A) = 0$.
平行四辺形の 2 つの辺が一致しているとつぶれているので面積は 0. 平行六面体の 2 つの辺が一致しているとつぶれているので体積は 0. n 次元平行体において, 2 つの辺が一致しているとつぶれた形になるので n 次元体積は 0. これは教科書の定理 3.2.3 (2).

(v) (等積性) A の 1 つの行に別の行の c 倍を加えたものを A' とすると

$$\det(A') = \det(A)$$

A を 3 次平方行列とし, 3 つの行を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ とする. $\boldsymbol{a}$ はどの行でもよい. $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の作る平方四辺形を底面と考えると, $\boldsymbol{a}$ のこの底面に対する高さで A の体積が決まる. $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{a} + c\boldsymbol{b}$ や $\boldsymbol{a} + c\boldsymbol{c}$ に変えても, 頂点は底面に対して平行に動くだけなので高さは変わらない. したがって体積も変わらない. これは教科書の定理 3.2.4 である.

(v) の (等積性) と (i) の (各行の c 倍と可換) から, (iii), (iv) の 2 つの交代性の性質がわりとすぐに導ける.

(i), (ii) をあわせて各行についての線形性と呼ばれるが, これと (iv) の (交代性 (2)) から (iii) の (交代性 (1)) が導ける. また, 逆も導ける.

(i), (ii), (iv) から (v) が導ける.

(i) と (v) からも (ii) を導くことはできるが, すぐには導けないようである.

3.5 行列式の帰納的定義と様々な性質の証明

置換とその符号の性質を知らなくても行列式は帰納的に定義できる. そして, それらは教科書の定理 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 の性質をもつことも数学的帰納法で示せる. 教科書の定理 3.2.1 の底面積×高さ (2 次だと底辺×高さ) の性質と前節の各行についての線形性 ((i), (ii)) と交代性 (2) の (iv) を示せばよい. これらは数学的帰納法でわりと簡単に示すことができる. このノートの定理 3.5 により, この帰納的な定義は教科書の定義と同じものになっていることもわかる.

2 次行列式は

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

で定義する. $n-1$ 次の行列式が定義できているとき, 第 1 列についての余因子展開を n 次行列式の定義とする. ここでは, 3 次の場合についての帰納的な定義を述べる.

$$\det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} = a_{11}\det\begin{bmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} - a_{21}\det\begin{bmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} + a_{31}\det\begin{bmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}$$

4 次, 5 次, . . . についても同様に定義する.

教科書の定理 3.2.1 は $a_{21}=0, a_{31}=0$ の場合なので成り立つ.

各行について c 倍と可換になること (教科書の定理 3.2.2 (1)) を示す. 2 次の行列式が線形性と交代性をもつことが帰納法の仮定になる. このことを途中で使う. どこで使っているか考えてほしい. さて, 第 1 行を c 倍してみると

$$\begin{aligned}
&\det\begin{bmatrix}ca_{11} & ca_{12} & ca_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\\
&= ca_{11}\det\begin{bmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} - a_{21}\det\begin{bmatrix}ca_{12} & ca_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} + a_{31}\det\begin{bmatrix}ca_{12} & ca_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}\\
&= ca_{11}\det\begin{bmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} - ca_{21}\det\begin{bmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} + ca_{31}\det\begin{bmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}\\
&= c\left(a_{11}\det\begin{bmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} - a_{21}\det\begin{bmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} + a_{31}\det\begin{bmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}\right)\\
&= c\det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

他の行についても同様である.

今度は各行についてベクトル和と可換になること (教科書の定理 3.2.2 (2)) を示す.

第 1 行について考えると

$$
\begin{aligned}
&\det \begin{bmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a'_{12}+a''_{12} & a'_{13}+a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\
&= (a'_{11}+a''_{11}) \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{21} \det \begin{bmatrix} a'_{12}+a''_{12} & a'_{13}+a''_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\
&\qquad + a_{31} \det \begin{bmatrix} a'_{12}+a''_{12} & a'_{13}+a''_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \\
&= a'_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a''_{11} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\
&\qquad - a_{21} \left(\begin{bmatrix} a'_{12} & a'_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a''_{12} & a''_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \right) \\
&\qquad + a_{31} \left(\begin{bmatrix} a'_{12} & a'_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a''_{12} & a''_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \right) \\
&= a'_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{21} \begin{bmatrix} a'_{12} & a'_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31} \begin{bmatrix} a'_{12} & a'_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \\
&\qquad + a''_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{21} \begin{bmatrix} a''_{12} & a''_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31} \begin{bmatrix} a''_{12} & a''_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

どの行でも同様である.

最後に行に関する交代性の 1 つ (教科書の定理 3.2.3 (2)) を示す. 同じ辺があれば体積はつぶれて 0 ということである.

1 行目と 2 行目が等しい場合.

$$
\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &= a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \\
&= 0 + a_{31} \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

1 行目と 3 行目が等しい場合.

$$
\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} &= a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} - a_{21} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} + a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \\
&= a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} - a_{21} \cdot 0 - a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

一般的には

$$
\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1})
$$

で帰納的に定義される. ここで, A_{i1} は A から第 1 列と第 i 行を取り除いた行列である.

A の第 i 行と第 j 行が同じだとすると,

$$
(-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{j+1} a_{j1} \det A_{j1}
$$

の形の部分が 0 になる. $j > i$ とすると, $j-i$ が偶数のときは $j-i-1$ 回の奇数回の行の交換で A_{i1} を A_{j1} に変換できるので $\det A_{i1} = -\det A_{j1}$. 一方, $(-1)^{i+1} a_{i1} = (-1)^{j+1} a_{j1}$. よってこの和は 0. $j-i$ が奇数のときは, $\det A_{i1} = \det A_{j1}$ で $(-1)^{i+1} a_{i1} = -((-1)^{j+1} a_{j1})$. よってこの和は 0.

また, $k \neq i, j$ のとき

$$
(-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}
$$

の形の部分については, A の第 i 行と第 j 行に由来する行列 A_{k1} の 2 つの行が同じになるので $\det A_{k1} = 0$ である.

3.6 行列式の定義についての補足

上のように帰納的に定義したものが教科書の定義と一致することがこのノートの定理 3.5 によりわかると述べたが, 行についての線形性と交代性と $\det(E_n) = 1$ ということから教科書の定義の式が導ける.

$$
\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \\
&= ac \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + ad \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + bc \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + bd \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ここで,

$$\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}=0,\ \det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=1,\ \det\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=-1,\ \det\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=0.$$

また, $\{1,2,\dots,n\}$ 上の置換 σ に対し, $\boldsymbol{e}_i$ を基本行ベクトル (第 i 成分が 1 で他の成分は 0) とするとき, $\det$ が行に関する交代性をもつことを使うと

$$\operatorname{sgn}(\sigma)=\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}\\ \boldsymbol{e}_{\sigma(2)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}\end{bmatrix}$$

である. 置換の符号を使わないで行列式の存在を示せば, 置換の符号がうまく定義されることがわかる. たとえば上で示したように帰納的な定義から行列式を導入すると, その性質から互換の符号 (偶奇) が存在することが導ける.

4　第 4 回 行列式の定義と性質 (2)

定理 3.3.1 は転置をしても行列式の値が変わらないことで, 定理 3.3.5 は, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ となるという定理である. 定理 3.3.2 と定理 3.3.3 は, 行列式のもつ行についての性質が列についても成り立つということで, 定理 3.3.1 から導かれる.

定理 3.3.1 は置換とその sgn についてよく理解していると簡単な証明と言える. 定理 3.3.5 の教科書の証明はうまくやっていると思うけれど, 自然な証明ではないと思われる.

この講義ノートの第 1 節の正則行列のところで説明した基本行列と関連させた証明を述べておく. いろいろな方法の証明を知ることで理解が深まるであろう.

4.1　行列の積の行列式

教科書の定理 3.3.5, すなわち $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ から示す.

この講義ノートの第 1 節でも説明しているが, 基本行列の定義をもう 1 度書く.

定義 4.1　E_n に行基本変形を 1 度ほどこして得られる行列を n 次 の**基本行列**と呼ぶ.

命題 4.2　A を $m \times n$ 型の行列とする. A に行基本変形を 1 回施して A' になったとする. 同じ行基本変形を E_n に施して得られる行列を F とすると

$$A' = FA.$$

F は基本行列である.

証明　$A = [\boldsymbol{a}_1\ \ldots \boldsymbol{a}_n]$ と列に分解して考えると $FA = [F\boldsymbol{a}_1\ \ldots F\boldsymbol{a}_n]$ なので, A が列ベクトルのときに確認すればよい. 行基本変形の 3 種類のパターンごとに考えると, すぐに確認できる. □

行基本変形はもとの列ベクトル成分の 1 次式で書けるので, 行列を左からかける操作として表現できる. 単位行列にその操作をやってみればその行列になるはずである.

例 4.3　E_3 について, 1 行目を c 倍すると次の F_1, 1 行目と 2 行目を交換すると次の F_2, 1 行目の c 倍を 2 行目に加えると次の F_3 になる.

$$F_1 = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

そして, 列ベクトルに作用してみると

$$\begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + cx_1 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

命題 4.4 (1) 1 つの行を c 倍 ($c \neq 0$) することを表す基本行列を F とすると $\det(F) = c$.

(2) 2 つの行を交換することを表す基本行列を F とすると $\det(F) = -1$.

(3) 1 つの行に別の行の何倍かを加えることを表す基本行列を F とすると $\det(F) = 1$.

証明 行列式の線形性と交代性 (教科書の定理 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4) と $\det(E_n) = 1$ による. □

この命題 4.4 と行列式の線形性と交代性 (教科書の定理 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4) により次もわかる.

補題 4.5 F を n 次基本行列, B を n 次正方行列とすると

$$\det(FB) = \det(F)\det(B)$$

命題 4.6 A を n 次正則行列, B を n 次正方行列とすると

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

証明 A は n 次正則行列なので, 基本行列の積で書ける. (行基本変形で E_n に変形できるが, その逆も行基本変形でできる. よって, A は基本行列の積で書ける) $A = F_1F_2 \cdots F_k$ (F_i は基本行列) のとき, 補題 4.5 を繰り返し使うと

$$\det(A) = \det(F_1)\det(F_2)\cdots\det(F_k)$$
$$\det(AB) = \det(F_1)\det(F_2)\cdots\det(F_k)\det(B)$$

となるので, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ である. □

命題 4.7　A を n 次正方行列とする. A が正則でないとき, $\det(A) = 0$.

証明　この命題は前回示している. A は行基本変形で 0 ベクトルの行を含む行列 B に変形できる. すると B は行基本変形で A に変形できる.

$$A = F_1 F_2 \cdots F_k B$$

と書けたとすると, 補題 4.5 を繰り返し使えば

$$\det(A) = \det(F_1)\det(F_2)\cdots\det(F_k)\det(B)$$

0 ベクトルの 0 倍は 0 ベクトルで, B は 0 ベクトルの行を含むので, $\det(B) = 0\cdot\det(B) = 0$. 以上から, $\det(A) = 0$. □

補題 4.8　A, B を n 次正方行列とする. AB が正則のとき, A も B も正則である.

証明　AB が正則と仮定する.

まず, B が正則であることを示す. B が正則でないとすると, 教科書の定理 2.4.2 の (4) の否定が成り立つ. すなわち, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ だが $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となる列ベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在する. すると $AB\boldsymbol{x} = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. よって, 教科書の定理 2.4.2 より, AB も正則でない. したがって, B も正則である.

すると B^{-1} がある. $A = (AB)B^{-1}$ となり, 正則行列の積は正則なので, A も正則である. □

定理 4.9　A, B を n 次正方行列とすると

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

証明　A が正則の場合は, 命題 4.6 により, この定理が成り立つ.

A が正則でない場合は, 補題 4.8 より (対偶より), AB も正則でない. 命題 4.7 より, $\det(A) = 0$ かつ $\det(AB) = 0$. よって, $\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B)$. □

4.2　転置の行列式

この節では $\det {}^t\!A = \det A$ (教科書の定理 3.3.1) を証明する. 幾何学的な意味はないと思うが, 重要な定理である.

教科書の定義を採用するとこの定理はすぐに出る. 教科書の証明を見てほしい.

補題 4.10　F が基本行列のとき, $\det({}^tF) = \det(F)$

証明　これは簡単に確かめられる. 例 4.3 をまた書くと

$$F_1 = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

F_1 のように第 i 行を c 倍する基本行列は対角行列なので転置しても同じである.

F_2 のように行を交換する基本行列も転置をしても同じ行列である. 交換の基本行列は対称行列である.

第 i 行の c 倍を第 j 行に加える意味の基本行列を転置すると第 j 行の c 倍を第 i 行に加える意味の基本行列になる. たとえば F_3 は 1 行目の c 倍を 2 行目に加える行列だが,

$${}^tF_3 = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

は 2 行目の c 倍を 1 行目に加える行列である. 一般に, 対角成分がすべて 1 の上三角行列または下三角行列になる. 転置をしても対角成分がすべて 1 の上三角行列または下三角行列になる. 行列式が 1 であることは変わらない. □

補題 4.11　A を n 次正方行列とすると

$$A \text{ が正則} \quad \iff \quad {}^tA \text{ が正則}$$

証明　A が正則とすると, $AX = XA = E_n$ となる X がある. 転置すると

$${}^tX\,{}^tA = {}^tA\,{}^tX = E_n$$

よって, ${}^tA$ も正則.

A の転置の転置は A なので, 逆も成り立つ. □

定理 4.12　A を n 次正方行列とすると

$$\det({}^tA) = \det(A)$$

証明　A が正則のときは基本行列の積で書ける. たとえば $A = F_1F_2\cdots F_k$ で F_i がすべて基本行列とすると

$${}^tA = {}^tF_k \cdots {}^tF_2\,{}^tF_1$$

よって
$$\det({}^tA) = \det({}^tF_k)\cdots\det({}^tF_2)\ \det({}^tF_1)$$
$\det({}^tF_i) = \det(F_i)$ なので
$$\begin{aligned}\det({}^tA) &= \det({}^tF_k)\cdots\det({}^tF_2)\det({}^tF_1)\\ &= \det(F_k)\cdots\det(F_2)\det(F_1)\\ &= \det(A)\end{aligned}$$
$\det(X)$ の値は数なので, 積の順番は変えても同じであることに注意してほしい.

A が正則でないときは, 補題 4.11 より, ${}^tA$ も正則でない. よって,
$$\det({}^tA) = 0 = \det(A).$$
□

5　余因子展開とクラーメルの公式

5.1　余因子展開

教科書の p.54 あたりから一般的な説明があるので, ここでは具体例で説明しながら, 余因子の概念を導入する.

理論的に重要な話である. 成分に変数が現れているときは余因子展開と呼ばれる方法で計算する必要がある場合もある.

定理 3.2.2 と定理 3.2.3 を主に使う変形を考える. 定理 3.2.1 と定理 3.2.4 も使う.

例 5.1　1 行目が $[5\ 8\ 6] = [5\ 0\ 0] + [0\ 8\ 0] + [0\ 0\ 6]$ なので,

$$\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix}5&8&6\\2&4&2\\3&2&1\end{bmatrix} &= \det\begin{bmatrix}5&0&0\\2&4&2\\3&2&1\end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix}0&8&0\\2&4&2\\3&2&1\end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix}0&0&6\\2&4&2\\3&2&1\end{bmatrix}\\
&= 5\det\begin{bmatrix}1&0&0\\2&4&2\\3&2&1\end{bmatrix} + 8\det\begin{bmatrix}0&1&0\\2&4&2\\3&2&1\end{bmatrix} + 6\det\begin{bmatrix}0&0&1\\2&4&2\\3&2&1\end{bmatrix}\\
&= 5\det\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&2\\0&2&1\end{bmatrix} + 8\det\begin{bmatrix}0&1&0\\2&0&2\\3&0&1\end{bmatrix} + 6\det\begin{bmatrix}0&0&1\\2&4&0\\3&2&0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

1 行目の 1 で下の行の成分を掃き出している. この変形で行列式の値は変わらない.

転置をしても行列式は変わらないので, 行基本変形と行列式の関係は, 列基本変形 (列の数倍, 列の交換, 1 つの列を別の列に加える) についても成り立つ.

列の入替えを 1 度やると -1 倍になることに気をつけて 1 行目が 1 の列を左に 1 列ずつ移動していくと

$$\det\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&2\\0&2&1\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}4&2\\2&1\end{bmatrix}$$

これを **(1, 1) 余因子**と呼ぶ.

$$\det\begin{bmatrix}0&1&0\\2&0&2\\3&0&1\end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&3&1\end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix}2&2\\3&1\end{bmatrix}$$

これを **(1, 2) 余因子**と呼ぶ.

$$\det\begin{bmatrix}0&0&1\\2&4&0\\3&2&0\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}0&1&0\\2&0&4\\3&0&2\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&4\\0&3&2\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}2&4\\3&2\end{bmatrix}$$

これを **(1, 3) 余因子**と呼ぶ.

以上から,

$$\det\begin{bmatrix}5&8&6\\2&4&2\\3&2&1\end{bmatrix}=5\det\begin{bmatrix}4&2\\2&1\end{bmatrix}-8\det\begin{bmatrix}2&2\\3&1\end{bmatrix}+6\det\begin{bmatrix}2&4\\3&2\end{bmatrix}$$

この展開を第 1 行に関する**余因子展開**と呼ぶ.

例 5.2　第 2 行についても上と同様の変形が考えられる. 第 2 行が $[2\ 4\ 2]=[2\ 0\ 0]+[0\ 4\ 0]+[0\ 0\ 2]$ なので,

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}5&8&6\\2&4&2\\3&2&1\end{bmatrix}&=\det\begin{bmatrix}5&8&6\\2&0&0\\3&2&1\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}5&8&6\\0&4&0\\3&2&1\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}5&8&6\\0&0&2\\3&2&1\end{bmatrix}\\&=2\det\begin{bmatrix}5&8&6\\1&0&0\\3&2&1\end{bmatrix}+4\det\begin{bmatrix}5&8&6\\0&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}+2\det\begin{bmatrix}5&8&6\\0&0&1\\3&2&1\end{bmatrix}\\&=2\det\begin{bmatrix}0&8&6\\1&0&0\\0&2&1\end{bmatrix}+4\det\begin{bmatrix}5&0&6\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}+2\det\begin{bmatrix}5&8&0\\0&0&1\\3&2&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

それぞれ det の部分を行の交換, 列の交換で第 1 列が上から 1 0 0 になるように変形する.

$$\det\begin{bmatrix}0&8&6\\1&0&0\\0&2&1\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}1&0&0\\0&8&6\\0&2&1\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}8&6\\2&1\end{bmatrix}$$

これを **(2, 1) 余因子**と呼ぶ

$$\det\begin{bmatrix}5&0&6\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}0&1&0\\5&0&6\\3&0&1\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&6\\0&3&1\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}5&6\\3&1\end{bmatrix}$$

これを **(2, 2) 余因子**と呼ぶ

$$\det\begin{bmatrix}5&8&0\\0&0&1\\3&2&0\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}0&0&1\\5&8&0\\3&2&0\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}0&1&0\\5&0&8\\3&0&2\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&8\\0&3&2\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}5&8\\3&2\end{bmatrix}$$

これを **(2, 3) 余因子**と呼ぶ

したがって,

$$\det\begin{bmatrix}5&8&6\\2&4&2\\3&2&1\end{bmatrix} = 2\det\begin{bmatrix}8&6\\2&1\end{bmatrix} - 4\det\begin{bmatrix}5&6\\3&1\end{bmatrix} + 2\det\begin{bmatrix}5&8\\3&2\end{bmatrix}$$

これを第 2 行に関する余因子展開と呼ぶ.

教科書では余行列を定義していないが便利な概念なので定義しておく.

定義 5.3　A を正方行列とする. A から第 i 行と第 j 列を除いた行列を A の (i, j) **余行列**と呼び, A_{ij} と書く.

$$A\text{ の }(i, j)\text{ 余因子} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

$A = [a_{ij}]$ と書くとき, A の (i, j) 余因子を $\tilde{a}_{ij}$ と書く.

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

である.

教科書では a^*_{ij} を定義している. 次が成り立つ.

$$a^*_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ji}) = \tilde{a}_{ji}$$

余因子の符号 ($+$, $-$ のどちらをつけるか) は次の**チェスボードルール**と呼ばれる規則に従う.

$$\begin{bmatrix}+&-&+&\cdots\\-&+&-&\cdots\\+&-&+&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{bmatrix}$$

例 5.4

$$A = \begin{bmatrix}5&8&6\\2&4&2\\3&2&1\end{bmatrix}$$

の余因子は A の並びに対応して書くと

$$\tilde{a}_{11} = \det \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 0, \quad \tilde{a}_{12} = -\det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 4, \quad \tilde{a}_{13} = \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = -8,$$
$$\tilde{a}_{21} = -\det \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 4, \quad \tilde{a}_{22} = \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -13, \quad \tilde{a}_{23} = -\det \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 14,$$
$$\tilde{a}_{31} = \det \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = -8, \quad \tilde{a}_{32} = -\det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2, \quad \tilde{a}_{33} = \det \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 4$$

一般に次が成り立つ. 列についても同様の余因子展開できる. 上の例を見れば一般に次の定理が成り立つことも予想できるであろう. 一般の成分を使って同様に議論すれば次を得る.

定理 5.5　A を n 次正方行列とする. $1 \leq i, j \leq n$ とする.

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{ik} \tag{1}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\tilde{a}_{kj} \tag{2}$$

(1) の式を第 i 行に関する余因子展開, (2) の式を第 j 列に関する余因子展開と呼ぶ.

5.2　余因子行列

定義 5.6　正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して

$$\tilde{A} = [a^*_{ij}] = [\tilde{a}_{ji}] = {}^t[\tilde{a}_{ij}]$$

を A の**余因子行列**と呼ぶ.

例 5.7　例 5.4 の A の余因子行列は

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 4 & -13 & 2 \\ -8 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

余因子行列については次が成り立つ.

定理 5.8　A を正方行列とすると

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A) \cdot E$$

教科書に一般的な証明があるので, 例で説明する.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

まず, 第 1 行についての余因子展開を書くと

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 5 \det \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 8 \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 6 \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

第 1 列の成分を変えても展開に必要な余因子は変わらないので

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = x \det \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - y \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + z \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= [x\ y\ z] \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} \\ \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{13} \end{bmatrix}$$

ここで $\tilde{a}_{ij}$ は A の (i, j) 余因子である.

$[x\ y\ z] = [5\ 8\ 6]$ (A の 1 行目) とすると

$$[5\ 8\ 6] \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} \\ \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{13} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 5 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \det(A)$$

$[x\ y\ z] = [2\ 4\ 2]$ (A の 2 行目) とすると

$$[2\ 4\ 2] \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} \\ \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{13} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$[x\ y\ z] = [2\ 4\ 2]$ (A の 2 行目) とすると

$$[3\ 2\ 1] \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} \\ \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{13} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

同じ行（辺）が 2 つあるとつぶれて体積 0 である (交代性). したがって,

$$A \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} \\ \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det(A) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

第 2 行での余因子展開を同様に考えると

$$\det\begin{bmatrix}5 & 8 & 6\\ x & y & z\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix} = x - \det\begin{bmatrix}8 & 6\\ 2 & 1\end{bmatrix} + y\det\begin{bmatrix}5 & 6\\ 3 & 1\end{bmatrix} - z\det\begin{bmatrix}5 & 8\\ 3 & 2\end{bmatrix} = [x\ y\ z]\begin{bmatrix}\tilde{a}_{21}\\ \tilde{a}_{22}\\ \tilde{a}_{23}\end{bmatrix}$$

この式から

$$A\begin{bmatrix}\tilde{a}_{21}\\ \tilde{a}_{22}\\ \tilde{a}_{23}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ \det(A)\\ 0\end{bmatrix}$$

第 3 行での余因子展開を同様に考えると

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}5 & 8 & 6\\ 2 & 4 & 2\\ x & y & z\end{bmatrix} &= x\det\begin{bmatrix}8 & 6\\ 4 & 2\end{bmatrix} - y\det\begin{bmatrix}5 & 6\\ 2 & 2\end{bmatrix} + z\det\begin{bmatrix}5 & 8\\ 2 & 4\end{bmatrix}\\ &= [x\ y\ z]\begin{bmatrix}\tilde{a}_{31}\\ \tilde{a}_{32}\\ \tilde{a}_{33}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

この式から

$$A\begin{bmatrix}\tilde{a}_{31}\\ \tilde{a}_{32}\\ \tilde{a}_{33}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \det(A)\end{bmatrix}$$

以上から

$$A\begin{bmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31}\\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32}\\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\det(A) & 0 & 0\\ 0 & \det(A) & 0\\ 0 & 0 & \det(A)\end{bmatrix} = \det(A)E$$

列に関する余因子展開も同様にできる.

第 1 列で余因子展開すると

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}x & 8 & 6\\ y & 4 & 2\\ z & 2 & 1\end{bmatrix} &= x\det\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix} - y\det\begin{bmatrix}8 & 6\\ 2 & 1\end{bmatrix} + z\det\begin{bmatrix}8 & 6\\ 4 & 2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\end{aligned}$$

これから,

$$\begin{bmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31}\end{bmatrix} A = \begin{bmatrix}\det(A) & 0 & 0\end{bmatrix}$$

第 2 列で余因子展開すると

$$\det\begin{bmatrix} 5 & x & 6 \\ 2 & y & 2 \\ 3 & z & 1 \end{bmatrix} = x - \det\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + y\det\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - z\det\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

これから,

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & \det(A) & 0 \end{bmatrix}$$

第 3 列で余因子展開すると

$$\det\begin{bmatrix} 5 & 8 & x \\ 2 & 4 & y \\ 3 & 2 & z \end{bmatrix} = x\det\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - y\det\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + z\det\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

これから,

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \det(A) \end{bmatrix}$$

以上から,

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)E$$

上の定理から次の定理もすぐでる.

定理 5.9　$\det(A) \neq 0$ のとき

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$$

2 次の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

に対してはどこで余因子展開しても行列式の (教科書での) 定義になる. 余因子行列は

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

である. 直接計算してみると

$$A\tilde{A} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}, \qquad \tilde{A}A = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$$

2 次の場合は余因子行列を使えば逆行列がすぐ求まる. すなわち, $ad-bc \neq 0$ のとき,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3 次以上の具体的な成分をもつ行列については逆行列は掃き出し法で求めた方が高速に計算できる.

5.3 外積

教科書には出ていないが, 余因子展開と関連があるので外積について説明しておく.

$\boldsymbol{a} = [a_1\ a_2\ a_3]$, $\boldsymbol{b} = [b_1\ b_2\ b_3]$ とする. 行列

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

の 1 行目に対する余因子からなるベクトル

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} & -\det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積と呼び, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と表記する. 次の行列式を 1 行目で余因子展開すると

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = [x\ y\ z] \cdot \boldsymbol{c}$$

ここで右辺は内積 (成分のごとの積の総和) である.

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}$ の内積を考えると, 上の式より

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{c} = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 0.$$

1 行目と 2 行目が同じベクトルになっているので交代性から行列式の値は 0 である.

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{c} = \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 0.$$

これは行列とその余因子行列の積の対角以外の成分が 0 になることの理由にもなっていた.

5.4 クラーメルの公式

n 次正方行列が正則のとき,

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

の解は次のように与えられる.

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x_i = \frac{\det[\boldsymbol{a}_1 \cdots \overset{i}{\boldsymbol{b}} \cdots \boldsymbol{a}_n]}{\det(A)}.$$

$[\boldsymbol{a}_1 \cdots \overset{i}{\boldsymbol{b}} \cdots \boldsymbol{a}_n]$ は A の第 i 列を列ベクトル $\boldsymbol{b}$ で置き換えた行列である. この公式を**クラーメルの公式**と呼ぶ.

$n = 3$ のときで説明する. $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3], \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ とすると $\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3$ である.

列に関する線形性を使うと,

$$\begin{aligned} \det[\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3] &= \det[(x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3)\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3] \\ &= x_1 \det[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3] + x_2 \det[\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3] + x_3 \det[\boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3] \\ &= x_1 \det[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3] = x_1 \det(A) \end{aligned}$$

ここで, 同じ列が 2 つあるので列に関する交代性により, $\det[\boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3] = 0$, $\det[\boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3] = 0$ である.

他の列でも同様である.

6　特別な形の行列式

6.1　ヴァンデルモンドの行列式

教科書の p.60 例題 3.5.1 の多項式をヴァンデルモンドの行列式と呼ぶ. この行列式はいろいろな場面で登場する. 置換 σ を互換の積で表したとき, 互換の個数が偶数になるか奇数になるかは σ にのみ依存して決まることを示すことに利用できる差積 Δ はヴァンデルモンドの行列式と等しい.

変数が 3 つのときに成り立つと仮定すると, 変数が 4 つのときは

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ 0 & x_2^3 - x_2^2 x_1 & x_3^3 - x_3^2 x_1 & x_4^3 - x_4^2 x_1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_2^2 - x_2 x_1 & x_3^2 - x_3 x_1 & x_4^2 - x_4 x_1 \\ 0 & x_2^3 - x_2^2 x_1 & x_3^3 - x_3^2 x_1 & x_4^3 - x_4^2 x_1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_2 x_1 & x_3^2 - x_3 x_1 & x_4^2 - x_4 x_1 \\ 0 & x_2^3 - x_2^2 x_1 & x_3^3 - x_3^2 x_1 & x_4^3 - x_4^2 x_1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ x_2^2 - x_2 x_1 & x_3^2 - x_3 x_1 & x_4^2 - x_4 x_1 \\ x_2^3 - x_2^2 x_1 & x_3^3 - x_3^2 x_1 & x_4^3 - x_4^2 x_1 \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)
\end{aligned}
$$

ヴァンデルモンドの行列式が差積になっていることを使うと次の定理がわかる.

定理 6.1　xy 平面上に $n+1$ 個の点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, x_{n+1}, y_{n+1}$ があり, x 座標は互いに異なるとする. すると, グラフがこの $n+1$ 個の点を通るような n 次多項式で定義される関数

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

が唯一つ存在する.

$n=3$ の場合を示そう. 4 点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_4,y_4)$ を通るとすると

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 = y_2 \\ a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 = y_3 \\ a_0 + a_1x_4 + a_2x_4^2 + a_3x_4^3 = y_4 \end{cases}$$

(x_i,y_i) は与えられた座標で, a_0,a_1,a_2,a_3 が未知数で, 行列で書くと

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

この係数行列はヴァンデルモンドの行列式を転置したものになっていて, x_1,x_2,x_3,x_4 の差積になる. x_1,x_2,x_3,x_4 は互いに異なるので $i\neq j$ のとき $x_i-x_j\neq 0$. よって, 係数行列の行列式は 0 でないので, 係数行列は正則行列である. したがって, 係数 a_0,a_1,a_2,a_3 はちょうど 1 組存在する.

なお, ヴァンデルモンドの行列式は転置したものもヴァンデルモンドの行列式と呼ぶ.

6.2 変数を含む行列式

成分に変数や多項式を含む行列式は展開すると多項式になる. 数だけが成分の場合は掃き出し法で計算すればよいが, 変数をもつ多項式を成分にもつ行列の行列式も計算する必要がわりとある.

多項式が成分にあっても, 列基本変形や行基本変形を少し施してから展開した方が見通しがよい場合が多い.

固有値の計算で出てくる行列式の計算例を挙げておく. 行または列に関する等積変形により適当な位置の定数の成分を 0 にすると因数が現れやすい. 余因子展開をするにも少し 0 の成分を作っておいてから余因子展開をする方がよい.

例 6.2

$$
\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{bmatrix} &= \det\begin{bmatrix} t-1 & -t+1 & 0 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{bmatrix} \quad ①-②\\
&= (t-1)\det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{bmatrix} \\
&= (t-1)\det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & t-3 & -1 \\ 0 & -2 & t-2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} ②+① \\ ③+① \end{matrix} \\
&= (t-1)\det\begin{bmatrix} t-2 & -1 \\ -2 & t-2 \end{bmatrix} \\
&= (t-1)((t-3)(t-2)-2) \\
&= (t-1)(t^2-5t+4) \\
&= (t-1)^2(t-4)
\end{aligned}
$$

途中で 0 を含む行または列で余因子展開しても悪くない. 1 行目で展開.

$$
\begin{aligned}
&(t-1)\det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{bmatrix} \\
&= (t-1)\left(\det\begin{bmatrix} t-2 & -1 \\ -1 & t-2 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & t-2 \end{bmatrix}\right) \\
&= (t-1)(((t-2)^2-1)+((-1)(t-2)-1)) \\
&= (t-1)(t^2-4t+3)+(-t+1)) \\
&= (t-1)^2(t-4)
\end{aligned}
$$

対称性が高い場合は 1 つの列あるいは行に集中的に等積変形を施すと因数が現れることがある.

例 6.3

$$
\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} x+y+z & y & z \\ y+z+x & z & x \\ z+x+y & x & y \end{bmatrix} \\
&= (x+y+z) \det \begin{bmatrix} 1 & y & z \\ 1 & z & x \\ 1 & x & y \end{bmatrix} \\
&= (x+y+z) \det \begin{bmatrix} 1 & y & z \\ 0 & z-y & x-z \\ 0 & x-y & y-z \end{bmatrix} \\
&= (x+y+z) \det \begin{bmatrix} z-y & x-z \\ x-y & y-z \end{bmatrix} \\
&= (x+y+z)((z-y)(y-z)-(x-z)(x-y)) \\
&= (x+y+z)((z-y)(y-z)-(x-z)(x-y)) \\
&= (x+y+z)(xy+yz+zx-x^2-y^2-z^2)
\end{aligned}
$$

7　まとめ

正方行列 A に数を対応させる行列式 $\det(A)$ を導入した. A が実数を成分とする正方行列のとき, $\det(A)$ は実数である.

A が実数を成分とする正方行列のとき, $|\det(A)|$ は A の行ベクトルが辺を表す平行体 (2 次なら平行四辺形, 3 次なら平行六面体) の n 次元体積になっている.

1 つの行を c 倍すると, det の値は c 倍になり, 1 つの行の c 倍を別の行に加えても det の値は変化しない. また n 次元の単位立方体を表す E_n について $\det(E_n) = 1$ である.

結果として, det は 1 つの行を c 倍すると det の値は c 倍になり, 1 つの行をベクトル和に分解すると det の値も数の和に分解し, 1 つの行の c 倍を別の行に加えても det の値は変化しないという条件を満たす.

「1 つの行をベクトル和に分解すると det の値も数の和に分解する」という性質は平行体の体積が底面積×高さとすると自然な性質である.

体積的なものはこの条件を満たすことが期待できる. これらの条件があると, 行列の各行は成分に分解できるので (例えば, $[a\ b\ c] = [a\ 0\ 0] + [0\ b\ 0] + [0\ 0\ c]$), 各行から成分を 1 つずつ残した行列の行列式の和に分解できる. たとえば 3 次の場合は

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{21}a_{33} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{a}_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{bmatrix} = a_{11}a_{23}a_{32} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

のような行列式の和に分解できる.

各行に 1 が 1 つで他は 0 という行列の行列式が問題になる. 縦に 1 が並ぶ場合は, 行を引き算しても det が変わらないから det の値は 0 となる.

また, 行を交換すると -1 倍という性質が「1 つの行の c 倍を別の行に加えても det は変わらない」という性質から出てくるので,

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \det(E_3)$$

となる. これは教科書にある定義と同じである.

この式が考えていた性質を満たすかどうかは明らかではない. 教科書にあるように, ほしい性質を導く必要がある.

置換の符号で挫折する人もわりといるようであるが, このノートで導入した方法なら置換の符号についてあらかじめやっておく必要はない. 2 次の行列式あるいは 1 次の行列式 $\det(a) = a$ から始めて, 帰納的に次数の高い行列式を定義していっても行に関する線形性と交代性や等積性をもつことを示せる. 行列式の存在から置換の符号の存在もすぐに導ける.

いろいろな定義や証明の仕方にふれて, 自分のわかりやすいもので理解しておけばよい.

最後に, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ のさらに別の証明を与えておこう. 正方行列から数への関数 f が, 行に関する線形性と交代性を満たすとすると $\det$ と同様に展開ができ, 最後のところで何回の行の交換で $f(E_n)$ に変形できるかで符号が決まる (偶数回なら $f(E_n)$, 奇数回なら $-f(E_n)$). すると, $f(A) = \det(A)f(E_n)$ がわかる. $f_B(A) = \det(AB)$ とすると f_B は行に関する線形性と交代性を満たすことがすぐわかるので, $f_B(A) = \det(A)f_B(E_n)$ となる. $f_B(E_n) = \det(E_nB) = \det(B)$ なので, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ がわかる.