# 線形代数 1
# 自習用講義ノート

教科書: 三宅敏恒著「線形代数学　初歩からジョルダン標準形へ」培風館

# 1　第 1 回 行列

教科書の補足として使ってほしい. 第 1 回は行列の積を主に学ぶ.

## 1.1　行列

長方形に数を並べたものを**行列**と呼ぶ. 横の並びを**行**, 縦の並びを**列**と呼ぶ. 教科書 p.1 からの「**1.1** 行列と数ベクトル」をあとでよく読むこと.

次の行列は教科書 p.4 例題 1.1.1 のもの.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & 12 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

これを 3 行 5 列の行列, $3 \times 5$ **型**の行列, $3 \times 5$ 行列, $(3, 5)$ 行列などと呼ぶ. 3 は行の数, 5 は列の数である. $3 \times 5$ 型というのは行列の大きさを表している．1 つの行の大きさ (成分の数) は 5 である．次のようになっている.

$$\begin{aligned} \text{行の大きさ} &= \text{列の数} = \text{行列の横の長さ} \\ \text{列の大きさ} &= \text{行の数} = \text{行列の縦の長さ} \end{aligned}$$

行列の行は上から順に第 1 行, 第 2 行, . . ., 列は左から順に第 1 列, 第 2 列, . . ., と呼ぶ.

第 $i$ 行第 $j$ 列にある数を $(i, j)$ **成分**と呼ぶ.

$A = [a_{ij}]$ と書いて, $A$ の $(i, j)$ 成分が $a_{ij}$ ということを表す.

1 行の行列を**行ベクトル**, 1 列の行列を**列ベクトル**と呼ぶ.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 & -4 & 5 \end{bmatrix} \text{(行ベクトル)} \qquad \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{(列ベクトル)}$$

高校で習ったベクトルや座標は行ベクトルまたは列ベクトルで表わせる.

行列 $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ に対し，$A = B$ とは $A$ と $B$ が同じ型 (大きさ) をもち，どの $i, j$ についても $a_{ij} = b_{ij}$ となることである (どの位置の成分も一致する).

## 1.2　行列のスカラー倍

行列 $A$ の各要素を $c$ 倍して得られる行列を $cA$ と書き, $A$ の $c$ **倍**と呼ぶ. $c$ を特定しない場合は $A$ の**スカラー倍**と呼ぶ. ベクトルの $c$ 倍の一般化になっている.

**例** 1.1

$$c\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \end{bmatrix}$$

$$3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

## 1.3　行列の和

ベクトルの和はある程度ご存知だと思う．高校で $(x,\ y)$ と書いていたものは，ここでは $[x\ y]$ のように書く.

$[x\ y] + [x'\ y'] = [x + x'\ y + y']$

同じ位置にある数同士の和をとってできるのがベクトルの和であった. 同じ型の行列 $A$, $B$ に対し, 同じ位置にある数同士の和をとってできる行列を $A + B$ と書き, $A$ と $B$ の**和**と呼ぶ. また，$A - B$ は $A + (-1)B$ のこととする. $aA - bB$ も $aA + (-b)B$ のこととする. 少し一般的な式も自然に計算できるであろう.

**例** 1.2

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

## 1.4　演習問題

**問.** 計算せよ.

$$(1)\quad 3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad (2)\quad 3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(3)\quad 2\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

# 2　第 2 回 行列の積

## 2.1　行ベクトルと列ベクトルの積

行列の積の特殊な場合として, 成分の数が同じ行ベクトルと列ベクトルの**積**は次のように定義される.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_n b_n$$

本質的にこれは内積である．本当の内積は列ベクトル同士, あるいは行ベクトル同士に対し定義される概念で, 転置と行列の積を用いて表現できる.

この段階では積の左側は行ベクトル, 右側は列ベクトルである. しかも, 両者において成分の個数は同じでないといけない. 次の積は定義されない.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

しかし,「列ベクトル」かける「行ベクトル」は次の一般的な定義ではいつも存在する. 一般には「行ベクトル」かける「列ベクトル」とは異なるものになる.

## 2.2　行列と行列の積

$A$ と $B$ を行列とし, $A$ の行 (行ベクトル) と $B$ の列 (列ベクトル) の積 (内積) が作れるとする. すなわち, $A$ の横の長さと $B$ の縦の長さが一致すると仮定する.

$$c_{ij} = A \text{ の第 } i \text{ 行と } B \text{ の第 } j \text{ 列の積}$$

とするとき, 行列 $C = [c_{ij}]$ を $AB$ と書き, $A$ と $B$ の**積**と呼ぶ.

次のように表をうめる形で計算するとよいだろう.

**例** 2.1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

とする. $A$ の行と $B$ の列をもとに次のような表を作る.

$$
\begin{array}{ccc|c|c|c}
 & & & 3 & 1 & 0 \\
 & & B & 2 & 0 & -1 \\
 & A & & -1 & 4 & 1 \\
\hline
2 & 1 & -3 & & & \\
\hline
1 & -5 & 2 & & & \\
\hline
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ccc|c|c|c}
 & & & 3 & 1 & 0 \\
 & & B & 2 & 0 & -1 \\
 & A & & -1 & 4 & 1 \\
\hline
2 & 1 & -3 & 11 & -10 & -4 \\
\hline
1 & -5 & 2 & -9 & 9 & 7 \\
\hline
\end{array}
$$

左の表の空欄を対応する行と列の「内積」で埋める. すると

$$AB = \begin{bmatrix} 11 & -10 & -4 \\ -9 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

少し一般的な例も挙げる.

**例 2.2**　$2 \times 3$ 行列と $3 \times 2$ 行列の一般的な積である.

$$
\begin{array}{ccc|c|c}
 & & & b_{11} & b_{12} \\
 & & B & b_{21} & b_{22} \\
 & A & & b_{31} & b_{32} \\
\hline
a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_{11} & c_{12} \\
\hline
a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_{21} & c_{22} \\
\hline
\end{array}
$$

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k1}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k2}$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k1}$$

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k2}$$

で $AB = C$.

**例** 2.3　「列ベクトル」かける「行ベクトル」はいつも定義される.

| | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 3 | 6 | 9 |
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 8 | 12 |

により　$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$

## 2.3　演習問題

**問.** 計算せよ.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$　　(4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$　　(6) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

# 3　第 3 回 行列の演算の性質

## 3.1　和, スカラー倍, 積の相互的な性質

成分がすべて 0 の行列を**零行列** (ゼロぎょうれつ) とよび, $O$ と書く. $m \times n$ 型の零行列を $O_{m,n}$ と書くこともある. 零行列である列ベクトルや行ベクトルは**零ベクトル** (ゼロベクトル) とよび, $\mathbf{0}$(0 の太字) と書くことが多い.

$n \times n$ 型の行列を**正方行列**とよぶ. 正方行列の $(i,i)$ 成分を**対角成分**とよぶ. 対角成分以外の成分がすべて 0 の行列を**対角行列**とよぶ. 対角成分がすべて 1 の**対角行列**を**単位行列**とよび, $E$ と書く. $I$ も単位行列の意味でよく使われる. $n \times n$ 型の単位行列を $E_n$ と書くことがある.

**例** 3.1

$$O_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad O_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

教科書 p.8 の次の性質は基本的である. 数の和や積の結合律や分配律から導かれる性質である. 積の結合律だけが少し難しい. 線形写像と行列の関係がわかれば写像の合成の結合律 (一般的に成り立つ) から行列の積の結合律がすぐに導かれる. 今回は行列の積の結合律を導いてみる. なるべく証明を追ってみてほしい. 議論が難しければ結果を信じるだけでも構わない.

$A, B, C$ などの大文字は行列, $a, b$ など細字の小文字は数を表す.

| | |
|---|---|
| 和の性質 | $A + B = B + A,\ A + O = A,$ |
| | $(A + B) + C = A + (B + C)$　(和の結合律) |
| 積の性質 | $AE = EA = A, AO = OA = 0,$ |
| | $(AB)C = A(BC)$　(積の結合律) |
| スカラー倍 | $0A = O,\ 1A = A,$ |
| | $(ab)A = a(bA), (aA)B = A(aB) = a(AB).$ |
| 分配律 | $a(A + B) = aA + aB,\ (a + b)A = aA + bA,$ |
| | $A(B + C) = AB + AC,\ (B + C)A = BA + CA.$ |

和の性質は成分ごとの演算なので, 数 (実数など) の和の性質がそのまま成り立つ. また $0A = O, 1A = A$ は定義から明らかである.

## 3.2 スカラー倍と分配律

まず, 場所の節約のために転置の記号を使う. 一般に ${}^t[a_{ij}] = [a_{ji}]$ である. 行列 $A$ の**転置行列** ${}^tA$ は, $A$ の行と列を入れ替えて得られる行列のことである. すなわち, $A$ が $m \times n$ 型の行列のとき, ${}^tA$ は $n \times m$ 型の行列で, ${}^tA$ の $(i, j)$ 成分は $A$ の $(j, i)$ 成分である. ${}^t({}^tA) = A$ がすぐわかる. ${}^tA$ を $A^{\mathrm{T}}$ と書くことも多い. 転置行列は英語で transpose of a matrix とか transposed matrix とよぶ.

**例** 3.2

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ のとき } {}^tA_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \text{ のとき } {}^tA_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

**命題** 3.3　$A$ と $B$ を行列, $a$ を数とする. $AB$ が定義されるとき

$$(aA)B = A(aB) = a(AB).$$

**証明**　$A$ が行ベクトル, $B$ が列ベクトルの場合に示す. $A = [a_1 \ \cdots \ a_n]$, $B = {}^t[b_1 \ \cdots \ b_n]$ とすると $aA = [aa_1 \ \cdots \ aa_n]$, $aB = {}^t[ab_1 \ \cdots \ ab_n]$ となる. すると,

$$\begin{aligned} (aA)B &= (aa_1)b_1 + \cdots + (aa_n)b_n = a(a_1b_1 + \cdots a_nb_n), \\ A(aB) &= a_1(ab_1) + \cdots + a_n(ab_n) = a(a_1b_1 + \cdots a_nb_n), \\ a(AB) &= a(a_1b_1 + \cdots a_nb_n). \end{aligned}$$

よって, これらは一致する.

これから, 一般の場合も $(aA)B = A(aB) = a(AB)$ が 成り立つことがわかる. □

この説明でわかる人も多いと思うが, あとで行列かける列ベクトルの場合について改めて考える.

**命題 3.4**　$A, B$ を同じ型の行列, $a, b$ を数とする.

$$a(A+B) = aA + aB, \quad (a+b)A = aA + bA.$$

**証明**　$A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ とすると $a(A+B), aA+aB$ の $(i,j)$ 成分は一般的に計算でき一致する. また, $(a+b)A$ と $aA+bA$ の $(i,j)$ 成分も一般的に計算でき一致する.　□

**命題 3.5**　$A, B, C$ を行列とする. $B$ と $C$ が同じ型で, $AB$ が定義されるとき

$$A(B+C) = AB + AC.$$

**証明**　$A$ が行ベクトル, $B, C$ が列ベクトルの場合だけ示す. $A = [a_1 \ \ldots \ a_n]$, $B = {}^t[b_1 \ \ldots \ b_n], C = {}^t[c_1 \ \ldots \ c_n]$ とする. すると

$$\begin{aligned}
AB &= a_1b_1 + \cdots + a_nb_n, \\
AC &= a_1c_1 + \cdots + a_nc_n, \\
AB + AC &= a_1(b_1+c_1) + \cdots + a_n(b_n+c_n). \\
&\text{一方,} \\
B + C &= {}^t[(b_1+c_1) \ \ldots \ (b_n+c_n)], \\
A(B+C) &= a_1(b_1+c_1) + \cdots + a_n(b_n+c_n).
\end{aligned}$$

以上より, $A(B+C) = AB + AC$.

一般の場合の分配律もこれから導かれる.　□

**問 3.6**　計算せよ.

(1)　$c\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$　　(2)　$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\left(c\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$

(3)　$c\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right)$　　(2)　$c\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

(5)　$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$　　(6)　$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

## 3.3　ブロック分割

教科書の p.11 1.3 で行列のブロック分割の説明がある. 最初は列ベクトルへの分割を理解すればよい. 前回の行列の積 $AB$ は, $A$ を行ベクトルに分割し, $B$ を列ベクトルに分割し

て計算するのを定義とするものであった. 教科書の最初の積の定義と教科書 p.14 の積の表現は同じことになっている.

ベクトルを表すのに $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ のように小文字の太字を使うことが多い.

$A$ を $m \times n$ 型の行列とする. $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$ という表現は, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ がそれぞれ $A$ の第 1 列, 第 2 列, . . ., 第 n 列のベクトルということである.

教科書にあるように, $A = [BC]$ で, $B$ が最初のいくつかの列からなる行列, $C$ が後半の残りの列からなる行列ということを表すこともある. 次の命題はすぐわかる.

**命題** 3.7　$A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$ は列ベクトルへの分割とし, $\boldsymbol{x} = {}^t[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]$($\boldsymbol{x}$ は列ベクトル) とする. すると

$$A\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n.$$

**例** 3.8　前回の演習問題から.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 1\cdot 1 + (-3)\cdot 2 \\ 1\cdot 3 + (-3)\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ (-3)\cdot 3 + 2\cdot 1 + 1\cdot 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**問** 3.9

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

とし, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ をそれぞれ $A$ の第 1 列, 第 2 列, 第 3 列のなす列ベクトルとする.

(1)　$A\boldsymbol{x}$ と $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3$ をそれぞれ計算して, $A\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3$ を示せ.

(2)　$c$ を数 (スカラー) とする. (1) を使って $A(c\boldsymbol{x}) = c(A\boldsymbol{x})$ を示せ.

次の命題も積の定義からすぐにわかる. 行列かける列ベクトルは列ベクトルになることに注意してほしい.

**命題** 3.10　$A$ と $B$ はかけられる行列とする. $B = [\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \cdots\ \boldsymbol{b}_r]$ を $B$ の列ベクトルへの分割とすると

$$AB = [A\boldsymbol{b}_1\ A\boldsymbol{b}_2\ \cdots A\boldsymbol{b}_r].$$

すなわち, 行列 $AB$ の第 $i$ 列は $A\boldsymbol{b}_i$ である.

## 3.4 積の結合律

定義より, $A$ が $m \times n$ 行列, $B$ が $n \times r$ 行列のとき $AB$ は $m \times r$ 行列になることを注意しておく. $B$ が $n' \times r$ 行列で $n \neq n'$ のときは $A$ と $B$ の積は定義されないことにも注意してほしい.

**命題 3.11**　$A$ を $m \times n$ 行列, $B$ を $n \times r$ 行列, $C$ を $r \times s$ 行列とする. このとき,

$$(AB)C = A(BC).$$

**証明**　スカラー倍の性質, 分配律, 命題 3.7, 3.10 を使って示す. わかりやすくするために $r = 3$ の場合に示す. 一般的に書いても大差はない. $(AB)C$ と $A(BC)$ の各列が一致することを示せばよい. どの列もほぼ同じように示せるので, 第 1 列が一致することだけ示す.

$n = 3$ なので, $B = [\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3]$ のように列に分解できて, $C$ の第 1 列を $\boldsymbol{c}_1$ とすると $\boldsymbol{c}_1 = {}^t[c_{11}\ c_{21}\ c_{31}]$ と書ける.

命題 3.10 より, $(AB)C$ の第 1 列は $(AB)\boldsymbol{c}_1$ である. $AB = [A\boldsymbol{b}_1\ A\boldsymbol{b}_2\ A\boldsymbol{b}_3]$ なので,

$$\begin{aligned}
(AB)\boldsymbol{c}_1 &= [A\boldsymbol{b}_1\ A\boldsymbol{b}_2\ A\boldsymbol{b}_3] \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix} \\
&= c_{11}(A\boldsymbol{b}_1) + c_{21}(A\boldsymbol{b}_2) + c_{31}(A\boldsymbol{b}_3) \quad \text{(命題 3.7 より)} \\
&= A(c_{11}\boldsymbol{b}_1) + A(c_{21}\boldsymbol{b}_2) + A(c_{31}\boldsymbol{b}_3) \quad \text{(スカラー倍の性質より)} \\
&= A(c_{11}\boldsymbol{b}_1 + c_{21}\boldsymbol{b}_2 + c_{31}\boldsymbol{b}_3) \quad \text{(分配律より)} \\
&= A([\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3] \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix}) \quad \text{(命題 3.7 より)} \\
&= A(B\boldsymbol{c}_1).
\end{aligned}$$

$B\boldsymbol{c}_1$ は $BC$ の第 1 列なので, $A(B\boldsymbol{c}_1)$ は $A(BC)$ の第 1 列. 以上から, $(AB)C$ の第 1 列と $A(BC)$ の第 1 列は一致する.

同様に, $1 \leq i \leq s$ について, $(AB)C$ の第 $i$ 列と $A(BC)$ の第 $i$ 列は一致する. □

**問 3.12**　命題 3.11 の証明を修正して, $A(BC)$ と $(AB)C$ の第 2 列が一致することを示せ.

## 3.5 積の非可換性

$A$, $B$ を同じ型の行列とする. $A+B$ は成分ごとの数の和で定義されているから $A+B=B+A$ である. すなわち, 行列の和は可換律 (交換律, 交換法則) をみたす. しかし, 積については一般には成り立たない. もちろん, $AB=BA$ をみたすこともある. $AB=BA$ のとき $A$ と $B$ は**可換**であるといい, $AB \neq BA$ のとき $A$ と $B$ は**非可換**であるという. $A$ と $B$ の型が異なれば, $AB$ と $BA$ はともに定義されていても型が異なる. 可換性が問題になるのは同じ型の正方行列の積の場合だけである.

**例** 3.13

$$(1)\quad A=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\quad B=[1\ 2\ 3]\qquad AB \text{ はあるが } BA \text{ はない}$$

$$(2)\quad A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\qquad AB\neq BA$$

$$(3)\quad A=\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1&4\\-2&-1\end{bmatrix}\qquad AB=BA$$

## 3.6 転置と積

行列 $A$ の行と列を入れ換えたものが $A$ の転置行列 ${}^tA$ であった. 次の命題により, 列に関することを調べておくと行に関する性質もすぐにわかることが多い.

**命題** 3.14　$A$ と $B$ を行列とする. $AB$ があるとき,

$${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA.$$

**証明**　まず,

$$A=[a_1\ a_2\ a_3],\quad B=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

とすると

$$AB = [a_1\ a_2\ a_3] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

$${}^t\!B\ {}^t\!A = [b_1\ b_2\ b_3] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

また,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

とすると $AB$ と ${}^t\!A\ {}^t\!B$ はそれぞれ次の左右の表で計算される.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | $b_{11}$ | $b_{12}$ | $b_{13}$ |
| | | $B$ | $b_{21}$ | $b_{22}$ | $b_{23}$ |
| | $A$ | | $b_{31}$ | $b_{32}$ | $b_{33}$ |
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | | | |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | $a_{11}$ | $a_{21}$ |
| | | ${}^t\!A$ | $a_{12}$ | $a_{22}$ |
| | ${}^t\!B$ | | $a_{13}$ | $a_{23}$ |
| $b_{11}$ | $b_{21}$ | $b_{31}$ | | |
| $b_{12}$ | $b_{22}$ | $b_{32}$ | | |
| $b_{13}$ | $b_{23}$ | $b_{33}$ | | |

□

## 3.7　単位行列と基本ベクトル

対角線に 1 が並び, その他の成分が 0 の行列が単位行列であった. 次のが 3 次の単位行列である.

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$n$ 次の単位行列 $E_n$ の第 $i$ 列のなす列ベクトルを $ve_i$ と書き, これらを $n$ 次の**基本ベクトル**とよぶ. $E_3 = [\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3]$ である. 次数によってものは違うが, ベクトルの大きさでは表記を区別しない. $\boldsymbol{e}_i$ は $i$ 行目 ($i$ 番目) の成分が 1 で, 他の成分はすべて 0 の列ベクトルである.

**命題 3.15**　$A\boldsymbol{e}_i$ は $A$ の第 $i$ 列である.

**証明**　たとえば $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]$ を列への分解とする. すると

$$A\boldsymbol{e}_2 = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = 0\cdot\boldsymbol{a}_1 + 1\cdot\boldsymbol{a}_2 + 0\cdot\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_2.$$

□

**命題** 3.16　${}^t\boldsymbol{e}_i A$ は $A$ の第 $i$ 行である. たとえば $[0\ 1\ 0\ 0]A$ は $A$ の第 2 行である.

**証明**　命題 3.16 より ${}^tA\boldsymbol{e}_i$ は ${}^tA$ の第 $i$ 列である. その転置は $A$ の第 $i$ 列で, 命題 3.14 より ${}^t\boldsymbol{e}_i\ A$ に等しい. □

命題 3.16 と命題 3.14 より, 次もわかる. これは直接の計算によってもわかる.

**命題** 3.17　$A$ を $m \times n$ 行列とする.

$$AE_n = E_m A = A.$$

## 3.8　今回のまとめ

今後よく使う性質をまとめておく. $A$, $A$ を行列, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{a}_i$ などを列ベクトルとする.

$$\begin{aligned}
&A(c\boldsymbol{x}) = c(A\boldsymbol{x})\\
&A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{x}'\\
&[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n\\
&(AB)\boldsymbol{x} = A(B\boldsymbol{x})\\
&[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a}_i\\
&{}^t({}^tA) = A\\
&{}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA
\end{aligned}$$

# 4　第 4 回 行列と連立 1 次方程式

今回は教科書 p.15 からの 1.4 節「行列と連立 1 次方程式」, p.19 からの 2.1 節「基本変形」の内容を学ぶ.

## 4.1　行列と連立 1 次方程式

行列はもともと連立 1 次方程式の解法から出てきた概念と思われる. 歴史的にはあとで学ぶ行列式の方が先に登場したそうである.

詳しくは教科書を見ていただくことにして, ここではなるべく具体的な例で説明する. いくつかの具体例から一般の形は想像できるであろう. 一般的な定義に対しても, 具体例をいくつか実際に書いてみる習慣をつけることをお勧めする.

行列の積の定義, ベクトルが同じということの定義から次の 3 つの条件は同値である (教科書の例題 1.4.1).

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ x - 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 4y = 9 \end{cases}$$

方程式 1 つの場合も

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 3y = 7$$

連立 1 次方程式において変数がたくさんある場合は同じ変数を何度も書かなければならない. それを簡潔に表現するために考え出されたのが行列と言ってよいだろう. 係数の作る行列と未知数のベクトルをうまく分離している. 係数の作る行列を**係数行列**とよぶ.

$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 4y = 9 \end{cases}$ は $\begin{cases} 2x + \phantom{(-4)}3y = 7 \\ x + (-4)y = 9 \end{cases}$ と考えて, 係数行列は $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ となる. 右辺の数も列ベクトルとして右側に加えた $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \end{bmatrix}$ あるいは $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \end{array}\right]$ を**拡大係数行列**とよぶ. 縦線は単なる目印で, 行列としての意味はない. 教科書のように点線で書くことも多いが, このように実線で書くこともある.

いくつか例を挙げておく. たとえば変数 $x_2$ がある式とない式がある場合は $+0x_2$ を $x_2$ のない式に補って考える.

| 連立 1 次方程式 | 係数行列 | 拡大係数行列 |
|---|---|---|
| $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ |
| $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_3 = 8 \\ x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ |

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_3 = 8 \\ x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

このように連立 1 次方程式は行列を使うと

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

のように表現できる. $\boldsymbol{x}$ は未知数 (変数) の列ベクトルである. $A$ が係数行列で, $[A|\boldsymbol{b}]$ が拡大係数行列である. $|$ は単に目印である. $[A\ \boldsymbol{b}]$ だと積にも見えるので紛らわしい.

拡大係数行列 $[A\,|\,\boldsymbol{b}]$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を表していると考えてもよい. $[A\,|\,\boldsymbol{b}]$ にある変形を施していくと $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解けるということを次の節で学ぶ.

この節の最後に $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の別の見方を紹介する. 線形代数における基本的な視点とも言える. 前回に出てきたようにさらに次が成り立つ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3$ ($c_1, c_2, c_3$ は数) を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の **1 次結合**とよぶ. 教科書 p.17 を見てほしい. ベクトルが 3 つの場合に限らず, 何個の場合でも 1 次結合が同じように定義される.

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ をみたすベクトル $\boldsymbol{x}$ を求める問題は $A$ の列ベクトルたちの 1 次結合で $\boldsymbol{b}$ を表す問題でもある.

## 4.2　消去法, 掃き出し法

連立 1 次方程式の解法として消去法 (ガウスの消去法) というのをご存知の方も多いと思う. 教科書 p.19 の連立方程式と p.21 の例題 2.1.1 の連立方程式で説明しよう.

$$
\text{(I)} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 8 & \cdots ① \\ \;\; x + 2y = 5 & \cdots ② \end{cases}
$$

式を 1 つ選んで, $x$ について解き, それを別の式に代入すると変数 $x$ が消去できる. この場合, $y$ だけの式が得られるので解ける.

たとえば $x+2y=5$ より, $x=5-2y$ として, 最初の式に代入すれば $y$ だけの方程式が得られて解ける.

移項して代入して解くのは実際は少し手間だが, 式の両辺を何倍かして別の式から引く (足す) ことで同じ効果が少し早く得られる. 式を何倍かして別の式へ加えて変数を消していく方法を**掃き出し法**とよぶ.

2 つ目の式の両辺を 2 倍して 1 つめの式から引いてみる. このことを ① + ② × (−2) と表記する.

$$
\begin{array}{rrcrcrl}
 & 2x & + & 3y & = & 8 & ① \\
+) & -2x & + & (-4)y & = & -10 & ②\times(-2) \\ \hline
 & & & -y & = & -2 &
\end{array}
$$

①と②から $-y=-2$ が得られた. 逆に $-y=-2$ と②から①が得られる.

$$
\begin{array}{rrcrcrl}
 & & & -y & = & -2 & \\
+) & 2x & + & 4y & = & 10 & ②\times 2 \\ \hline
 & 2x & + & 3y & = & 8 & ①
\end{array}
$$

以上から連立方程式 (I) と次の連立方程式 (II) は同値である. $①' = ① + ② \times (-2)$.

$$
\text{(II)} \quad \begin{cases} \qquad -y = -2 & \cdots ①' \\ x + \;2y = \;\;5 & \cdots ② \end{cases}
$$

ここまで来れば $①'$ より $y=2$ となり, ②に代入すれば $x=1$ を得る.

代入の代わりに式を何倍かしたあと両辺同士を加えればもう 1 つの式から $y$ を消せる. せっかくなので教科書と違う変形をする. 最後の形は同じになるけれど, 途中経過はたく

さんありえる. いずれも同値変形である.

$$\text{II)}\quad \begin{cases} \qquad\quad y = 2 & \cdots ①'' = ①' \times (-1) \\ x + 2y = 5 & \cdots ② \end{cases}$$

$$\text{III)}\quad \begin{cases} \qquad y = 2 & \cdots ①'' \\ x \qquad = 1 & \cdots ②' = ② + ①'' \times (-2) \end{cases}$$

連立方程式を解くという観点からはこれで終わりでもよいが, 連立方程式をたてるときというのは $[x\ y]$ という順番も考慮に入れた組が重要になることが多い. すなわち, ベクトルとしてとらえると次のように変形した方がよい.

$$\text{IV)}\quad \begin{cases} x \qquad = 1 & \cdots ②' \\ \qquad y = 2 & \cdots ①'' \end{cases}$$

連立方程式は「かつ」で結ばれているので, 並べ替えても同値である.

今度は 3 変数の例をみる (教科書 p.21).

$$\begin{cases} 2x + 3y - \ z = -3 & \cdots ① \\ -x + 2y + 2z = \ \ 1 & \cdots ② \\ \ x + \ y - \ z = -2 & \cdots ③ \end{cases}$$

これも方程式を 1 つ選んで $x$ について解き ($y$, $z$ の式で求める), 残りの 2 つの式に代入する. すると, $y$, $z$ の 2 つの 1 次方程式が得られるので上と同様に解ける.

変数が $n$ 個あっても方程式も $n$ 個あれば変数を 1 つずつ消去していけば帰納的に解けそうである.

最初に $x$ を消去するのに使う式を選ぶ. その選んだ式以外の式から $x$ を消去するのである. $x$ の係数が 0 でないものを選ばなければ $x$ を消去できない. そのようなものならどれでもよい.

一方, コンピュータで近似計算する場合は係数が 1 に近いものを選ぶ方がよいという法則もあるので, 教科書のように係数が 1 のものがあればそれを採用する方がよいとは言える.

教科書と同じく③を選んでみる. 選んだ式の $x$ の係数を**軸 (ピボット)** とよぶ. これを使って別の式から $x$ を消去する (係数を 0 にする).

$$\begin{cases} \quad y + z = 1 & \cdots ①' = ① + ③ \times (-2) \\ \quad 3y + z = -1 & \cdots ②' = ② + ③ \\ x + y - z = -2 & \cdots ③ \end{cases}$$

③ は置いておいて,

$$\begin{cases} y + z = 1 & \cdots ①' \\ 3y + z = -1 & \cdots ②' \end{cases}$$

を解く. ①′ を軸を含む式に選んで ②′ の $y$ を消去する.

$$\begin{cases} y + z = 1 & \cdots ①' \\ \quad -2z = -4 & \cdots ②'' = ②' + ①' \times (-3) \end{cases}$$

$-2z = -4$ より, $z = 2$. ここまでが「前進消去」とよばれる操作である. 変数がすべて消去されて, $z$ の値が求まった. 省略していた ③ もあわせて

$$\begin{cases} \quad y + z = 1 & \cdots ①' \\ \quad\quad z = 2 & \cdots ②''' = ②'' \times (-1/2) \\ x + y - z = -2 & \cdots ③ \end{cases}$$

$z$ が求まっているので他の式に「代入」する. すると $y$ が求まり, それから $x$ が求まるという仕掛けになっている. これを「後退代入」とよぶ. 実際は $z$ の値を代入する代わりに ②‴ を使って別の式の $z$ を「掃き出す」.

$$\begin{cases} \quad y = -1 & \cdots ①'' = ①' - ②''' \\ \quad\quad z = 2 & \cdots ②''' \\ x + y = 0 & \cdots ③' = ③ + ②''' \end{cases}$$

$y$ も求まったので ①″ で ③ の $y$ の係数を「掃き出す」.

$$\begin{cases} \quad y = -1 & \cdots ①'' \\ \quad\quad z = 2 & \cdots ②''' \\ x = 1 & \cdots ③'' = ③' - ①'' \end{cases}$$

並べ換えて

$$\begin{cases} x = 1 \\ \quad y = -1 \\ \quad\quad z = 2 \end{cases}$$

## 4.3　基本変形

上で説明した連立 1 次方程式の同値変形は次の 3 種類に分類できる. これらを連立 1 次方程式の基本変形とよぶ.

(1) 1 つの式を何倍か ($\neq$0 倍) する.
(2) 2 つの式を入れ替える.
(3) 1 つの式に他の式の何倍かを加える.

(1) で, 式を $c$ 倍 ($c \neq 0$) すると, $1/c$ 倍することでもとにもどせる. (1) の変形は同値変形である.

(2) の変形も「かつ」で結ばれた条件の順番を入れ替えるだけなので同値である.

(3) の変形も ⓘ$'$ $=$ ⓘ $+$ ⓙ $\times c$ という変形を施したとすると, ⓙ があるので, ⓘ $=$ ⓘ$'$ $+$ ⓙ $\times (-c)$ でもとの式を復元できる.

連立 1 次方程式には拡大係数行列が対応している. 連立 1 次方程式の基本変形は拡大係数行列の行の変形に対応している.

(1) 1 つの行を何倍か ($\neq$0 倍) する.
(2) 2 つの行を入れ替える.
(3) 1 つの行に他の行の何倍かを加える.

これらの変形は一般の行列でも意味をもち, **行基本変形**とよばれる. 同様に**列基本変形**もあるが, この講義では出てこないと思う.

連立 1 次方程式の基本変形についての説明から行基本変形は行基本変形でもとにもどすことができる. 連立 1 次方程式において基本変形は同値変形であった. したがって次の定理が成り立つ.

**定理** 4.1　$A$ を行列, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}$ を列ベクトルで, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に意味があるとする.

$[A \mid \boldsymbol{b}]$ に行基本変形をほどこして $[A' \mid \boldsymbol{b}']$ になったとすると

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$$

上で示した連立 1 次方程式の変形を拡大係数行列で表すと次のようになる. 教科書のように 1 つ前の行列の第 1 行, 第 2 行, 第 3 行をそれぞれ ①, ②, ③ で表す.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ \ \ x + 2y = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{array}{cc|cl}
\hline
2 & 3 & 8 & \\
1 & 2 & 5 & \text{軸の行にする (軸} = 1) \\
\hline
0 & -1 & -2 & ① + ② \times (-2) \\
1 & 2 & 5 & \text{軸の行} \\
\hline
0 & 1 & 2 & ① \times (-1) \\
1 & 2 & 5 & \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc|cl}
\hline
0 & 1 & 2 & \\
1 & 0 & 1 & ② - ① \times (-2) \\
\hline
1 & 0 & 1 & \text{行の交換} \\
0 & 1 & 2 & \\
\hline
\end{array}
$$

最後の拡大係数行列から最初の連立 1 次方程式の解は

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

次は上で解いた 3 変数の連立 1 次方程式について拡大係数行列に対する掃き出し法で解いてみる.

$$
\left\{
\begin{array}{rcrcrcr}
2x & + & 3y & - & z & = & -3 \\
-x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\
x & + & y & - & z & = & -2
\end{array}
\right.
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{rrr|rl}
\hline
2 & 3 & -1 & -3 & \\
-1 & 2 & 2 & 1 & \\
1 & 1 & -1 & -2 & \\
\hline
0 & 1 & 1 & 1 & ① + ③ \times (-2) \\
0 & 3 & 1 & -1 & ② + ③ \\
1 & 1 & -1 & -2 & \text{軸の行を選ぶ} \\
\hline
0 & 1 & 1 & 1 & \text{軸の行を選ぶ} \\
0 & 0 & -2 & -4 & ② + ① \times (-3) \\
1 & 1 & -1 & -2 & \\
\hline
0 & 1 & 1 & 1 & \\
0 & 0 & 1 & 2 & ② \times (-1/2) \\
1 & 1 & -1 & -2 & \text{「前進消去」終わり} \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr|rl}
\hline
0 & 1 & 0 & -1 & ① - ② \\
0 & 0 & 1 & 2 & z \text{ の値} \\
1 & 1 & 0 & 0 & ③ + ② \\
\hline
0 & 1 & 0 & -1 & y \text{ の値} \\
0 & 0 & 1 & 2 & \\
1 & 0 & 0 & 1 & ③ - ① \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & \text{2 回の交換} \\
0 & 1 & 0 & -1 & \\
0 & 0 & 1 & 2 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

最初に軸の行を選んだら一番上にもってくる方が見やすくなる. 下の例では交換での変

形は 2 回必要. 1 行目と交換でもよい. この先は各自やってみてほしい.

$$
\begin{array}{rrr|rl}
\hline
2 & 3 & -1 & -3 & \\
-1 & 2 & 2 & 1 & \\
1 & 1 & -1 & -2 & \\
\hline
1 & 1 & -1 & -2 & \text{軸に選んだら一番上に} \\
2 & 3 & -1 & -3 & \\
-1 & 2 & 2 & 1 & \\
\hline
\end{array}
$$

行列に対する掃き出し法の大まかなプロセスを述べると行基本変形を駆使して, 次のように 0 を作って行く. まずは左の列から右にむかって下方の成分を掃き出して 0 を作り, そのあと右の列から左にむかって上方の成分を掃き出して 0 にし, 対角行列にする.　必要に応じて途中で行の並べ換えもする. $*$ は何らかの数を表している.

$$
\begin{array}{ccc|cl}
\hline
* & * & * & * & \\
* & * & * & * & \\
* & * & * & * & \\
\hline
* & * & * & * & \text{第 1 列の下側を掃き出す} \\
0 & * & * & * & \\
0 & * & * & * & \\
\hline
* & * & * & * & \text{第 2 列の下側を掃き出す} \\
0 & * & * & * & \\
0 & 0 & * & * & \\
\hline
* & * & * & * & \text{「前進消去」終わり} \\
0 & * & * & * & \\
0 & 0 & 1 & * & z \text{ の係数を 1 に} \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc|cl}
\hline
* & * & 0 & * & \text{第 3 列の上側を掃き出す} \\
0 & * & 0 & * & \text{(「後退代入」)} \\
0 & 0 & 1 & * & \\
\hline
* & * & 0 & * & \\
0 & 1 & 0 & * & y \text{ の係数を 1 に)} \\
0 & 0 & 1 & * & \\
\hline
* & 0 & 0 & * & \text{第 2 列の上側を掃き出す} \\
0 & 1 & 0 & * & \\
0 & 0 & 1 & * & \\
\hline
1 & 0 & 0 & * & x \text{ の係数を 1 に} \\
0 & 1 & 0 & * & \\
0 & 0 & 1 & * & \\
\hline
\end{array}
$$

ではもう 1 度別の変形で先程の連立 1 次方程式を解いてみる. 今度はなるべく上の行で選ぶという方針でやってみる. この方が「前進消去」したあと「後退代入」するという意味がわかりやすいと思う. 一般には軸の成分を割り算で 1 にして掃き出すのがわかりやすいが, 分数計算を手で行うのは少し面倒である. 軸の行はそのままで, 掃き出したい成分のある行に軸 (ピボット) の値をかけておくのもよい.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | −1 | −3 | |
| −1 | 2 | 2 | 1 | |
| 1 | 1 | −1 | −2 | |
| 2 | 3 | −1 | −3 | 軸の行を選ぶ (2 が軸) |
| −2 | 4 | 4 | 2 | ② × 2 |
| 2 | 2 | −2 | −4 | ③ × 2 |
| 2 | 3 | −1 | −3 | 軸の行 |
| 0 | 7 | 3 | −1 | ② + ① |
| 0 | −1 | −1 | −1 | ③ − ① |
| 2 | 3 | −1 | −3 | |
| 0 | 7 | 3 | −1 | 軸の行を選ぶ (7 が軸) |
| 0 | −7 | −7 | −7 | ③ × 7 |
| 2 | 3 | −1 | −3 | |
| 0 | 7 | 3 | −1 | 軸の行 |
| 0 | 0 | −4 | −8 | ③ + ② |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | −1 | −3 | |
| 0 | 7 | 3 | −1 | 「前進消去」終わり |
| 0 | 0 | 1 | 2 | ③ × (−1/4) |
| 2 | 3 | 0 | −1 | ① + ③ |
| 0 | 7 | 0 | −7 | ② + ③ × (−3) |
| 0 | 0 | 1 | 2 | |
| 2 | 3 | 0 | −1 | |
| 0 | 1 | 0 | −1 | ② × 1/7 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | |
| 2 | 0 | 0 | 2 | ① + ② × (−3) |
| 0 | 1 | 0 | −1 | |
| 0 | 0 | 1 | 2 | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | ① × 1/2 |
| 0 | 1 | 0 | −1 | |
| 0 | 0 | 1 | 2 | |

最後に教科書 p.22 問題 2.1 の 2 (4) を解いてみる.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

解.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 0 | 4 | |
| 1 | −1 | 1 | 1 | |
| 3 | 1 | −3 | −2 | |
| 1 | −1 | 1 | 1 | 軸の行を選び先頭行に |
| 2 | 3 | 0 | 4 | ① と ② の交換 |
| 3 | 1 | −3 | −2 | |
| 1 | −1 | 1 | 1 | 軸の行 |
| 0 | 5 | −2 | 2 | ② − ① × 2 |
| 0 | 4 | −6 | −5 | ③ − ① × 3 |
| 1 | −1 | 1 | 1 | |
| 0 | 5 | −2 | 2 | 軸の行を選ぶ (軸は 5) |
| 0 | 20 | −30 | −25 | ③ × 5 |
| 1 | −1 | 1 | 1 | |
| 0 | 5 | −2 | 2 | 軸の行 |
| 0 | 0 | −22 | −33 | ③ + ② × (−4) |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | −1 | 1 | 1 | |
| 0 | 5 | −2 | 2 | |
| 0 | 0 | 1 | 3/2 | ③ × (−1/22) |
| 1 | −1 | 0 | −1/2 | ① + ③ × (−1) |
| 0 | 5 | 0 | 5 | ② + ③ × 2 |
| 0 | 0 | 1 | 3/2 | |
| 1 | −1 | 0 | −1/2 | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | ② × (1/5) |
| 0 | 0 | 1 | 3/2 | |
| 1 | 0 | 0 | 1/2 | ① + ② |
| 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 0 | 0 | 1 | 3/2 | |

## 4.4　教科書の例題の方法について

教科書の例題では上で説明した方法とは少し異なる方法をとっている. 0 を作る順番は大まかには以下の通りである. もちろんこの方法でも結果は同じになるが, 列が多い場合は上で説明した方法よりも計算が増える. 3 変数ぐらでは大差ないが, それでも少し余分な計算をすることになる. ただし, こちらの方がわかりやすい面はあると思う.

$$
\begin{array}{ccc|cl}
\hline
* & * & * & * & \\
* & * & * & * & \\
* & * & * & * & \\
\hline
* & * & * & * & \text{第 1 列の下側を掃き出す} \\
0 & * & * & * & \\
0 & * & * & * & \\
\hline
* & 0 & * & * & \text{第 2 列の上下を掃き出す} \\
0 & * & * & * & \\
0 & 0 & * & * & \\
\hline
* & 0 & 0 & * & \text{第 3 列の上側を掃き出す} \\
0 & * & 0 & * & \\
0 & 0 & * & * & \\
\hline
1 & 0 & 0 & * & \text{各変数の係数を 1 に} \\
0 & 1 & 0 & * & \\
0 & 0 & 1 & * & \\
\hline
\end{array}
$$

# 5　第 5 回 簡約な行列

今回は教科書 p.23 からの 2.2 節「簡約な行列」の内容を学ぶ. 連立 1 次方程式は変数の数より条件の式の数の方が少ないと値が求まらない気もする. 実は解がない場合もある. 変数が 2 つで式が 2 つでも解がない場合もある. 一方, 2 変数で式が 1 つの場合, たとえば $y - 2x = 3$ という式だと $x$ を任意に与えても $y$ は値をもつ. $y = 2x + 3$ という一般解の形で求まる. 簡約な行列は一般解を求める場合に重要な形である. どんな行列も行基本変形で簡約な行列に変形できる. この講義の範囲では連立 1 次方程式を解くための便利な記法にしかすぎないと思われるかも知れないが, 簡約形からその行列に関する様々な性質が読み取れるのである. このことは線形代数 3 や 4 で学ぶ予定である.

## 5.1　簡約な行列

行列の 1 つの行について, 0 でない 1 番左側の成分をその行の**主成分**とよぶ. 行が零ベクトルの場合は主成分をもたない. 次の行列において, 第 1 行の主成分は 3, 第 2 行の主成分は 2, 第 3 行は主成分をもたない.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**定義 5.1**　次の条件 (I) から (IV) をみたす行列を**簡約**な行列とよぶ. 条件 (I) と条件 (III) の 2 つの条件をみたす行列を**階段行列**とよぶ.

(I)　零ベクトルの行は零ベクトルでない行より下にある.
(II)　零ベクトルでない行の主成分は 1.
(III)　各行の主成分は下に行くほど右にある.
(IV)　各行の主成分を含む列はその主成分以外は 0.

次の行列は簡約な行列である. 教科書 p.23 の例も見ること.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

## 5.2　行列の簡約化

**定理** 5.2　任意の行列は行基本変形を繰り返すことにより簡約な行列に変形できる. 得られる簡約な行列はもとの行列に対し一通りしかない.

行列を行基本変形だけで簡約な行列に変形することを**簡約化する**という. 簡約化して得られる簡約な行列のことをもとの行列の**簡約化**とよぶこともある.

　ここでは教科書の方法より少しだけ計算が楽になる方法を説明する. 前回の「前進消去」,「後退代入」による方法である.

「前進消去」の方法により下半分を掃き出して階段行列に変形し,「後退代入」により上半分を掃き出すという方法である. 主成分を 1 にするタイミングはいつでもよい. きちんと書けば任意の行列が簡約化できることの証明になる. 一意性については線形代数 3 でやる.

下方の掃き出し (「前進消去」)
1 行目から最終行の中で主成分が 1 番左にある行を選び,
1 行目と交換する (軸選択).
1 行目の主成分 (軸) で同じ列の 2 行目以降の成分を 0 にする (掃き出し).
2 行目以降で同様なことを行う.
3 行目以降で同様なことを行う.
...
上方の掃き出し (「後退代入」)
一番下の行の主成分で上の成分を掃き出す.
一番下から 2 番目の行の主成分で上の成分を掃き出す.
...
最後あるいは途中で主成分を 1 にする (その行を主成分で割る).

下側の成分を掃き出すところで上側も掃き出すと教科書の方法になる. ただし, 教科書ではアルゴリズムの形では説明していない.

教科書 p.25 にある例をここで述べた方法で変形してみる. なお, 行の並び替えは好きにして構わない. 2 行ずつの入替えですべての並び替えが得られることが知られている.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

1-3 行目で主成分が一番左にあるのは 2 行目と 3 行目. 3 行目の主成分を軸に選ぶ (軸選択). 選んだ行を 1 行目と交換.

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{軸選択} \\ \\ \\ \end{array}$$

掃き出しのために軸を 1 に. (掃き出される方を何倍かしておいてもよい)

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{①} \times (1/2) \\ \\ \\ \end{array}$$

下方の掃き出し

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{軸} \\ \text{③} + \text{①} \times (-3) \\ \text{成分 0 で掃き出す必要なし} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

2-3 行目に着目. 一番左の主成分は 3 行目. それを 2 行目と交換.

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{軸} \\ \text{掃き出す必要なし} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

後半開始. 3 行目の主成分を 1 に

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{③} \times (1/2) \end{array}$$

3 行目の主成分で上方を掃き出し

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{②} + \text{③} \times 2 \\ \text{②} + \text{③} \times (-3) \\ \text{3 行目の主成分が軸} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2 行目の主成分を 1 に

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} ② \times (1/2)$$

2 行目の主成分で上方を掃き出し

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} ① + ② \times 3 \\ \text{2 行目の主成分が軸} \\ \phantom{x} \end{array}$$

さらにいくつか変形例を示す.

教科書 p.27 問題 2.2 4.(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{軸 (下方の掃き出し)} \\ ② - ① \end{array}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} ① + ② \times 2 \\ \text{軸 (上方の掃き出し)} \end{array}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} ② \times (-1)$$

教科書 p.27 問題 2.2 4.(7)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{軸 (下方の掃き出し)} \\ ② - ① \\ ③ - ① \end{array}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \phantom{x} \\ \text{軸 (下方の掃き出し)} \\ ③ - ② \times 2 \end{array}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ② \times (-1/2)$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} ① - ② \times 3 \\ \text{軸 (上方の掃き出し)} \\ \phantom{x} \end{array}$$

## 5.3 行列の階数

行列 $A$ の簡約化を $B$ とする.

$\mathrm{rank}(A) = B$ の零ベクトルでない行の個数
と定義する. すると
$\mathrm{rank}(A) = B$ の主成分を含む列の個数
上の簡約化の例から次がわかる.

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \end{bmatrix} = 3, \qquad \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

次が成り立つ.

**定理** 5.3　$A$ を $m \times n$ 行列とすると

$$\mathrm{rank}(A) \leqq m, \quad \mathrm{rank}(A) \leqq n$$

階数は下方を掃き出して階段行列に変形した時点での零ベクトルでない行の個数である. すなわち階段行列の段数である. 上で説明した簡約化の前半の下方の掃き出し (階段化) だけで階数はわかる.

## 5.4　その他の計算例

簡約化の例をさらに示す.

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \\
\to &\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{軸選択 ③} \leftrightarrow \text{①} \\ \\ \\ \end{matrix} \\
\to &\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 & 8 \\ 10 & -4 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{軸} \\ \text{②} \times 2 \\ \text{③} \times 2 \end{matrix} \\
\to &\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{軸} \\ \text{②} + \text{①} \times 3 \\ \text{③} + \text{①} \times 5 \end{matrix}
\end{aligned}$$

$$
\to \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \text{軸} \\ ③-② \end{matrix}
$$

$$
\to \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ ③\times(1/2) \end{matrix}
$$

$$
\to \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} ②+③\times 2 \\ ②-③\times 2 \\ 3\,\text{行目の主成分が軸} \end{matrix}
$$

$$
\to \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} ①-② \\ 2\,\text{行目の主成分が軸} \\ \\ \end{matrix}
$$

$ad \neq bc, a \neq 0$ とする.

$$
\to \begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\to \begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \\ ac & ad & 0 & a \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{軸選択} \\ ②\times a \end{matrix}
$$

$$
\to \begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{軸} \\ ②-①\times c \end{matrix}
$$

$D = ad - bc$ とおく

$$
\to \begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -c/D & a/D \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ ②\times(1/D) \end{matrix}
$$

$1 + bc/D = (D + bc)/D = (ad - bc + bc)/D = ad/D$

$$
\to \begin{bmatrix} a & 0 & ad/D & -ab/D \\ 0 & 1 & -c/D & a/D \end{bmatrix} \begin{matrix} ①-②\times b \\ \text{軸} \end{matrix}
$$

$$
\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & d/D & -b/D \\ 0 & 1 & -c/D & a/D \end{bmatrix} \begin{matrix} ①\times(1/a) \\ \\ \end{matrix}
$$

# 6　第 6 回 連立 1 次方程式を解く

今回は教科書 p.28 からの 2.3 節「連立 1 次方程式を解く」の内容を学ぶ.

行列の簡約化を用いるとどんな形の連立 1 次方程式も解ける. ただし「解がない」（解けない）という結果もありえる.

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に対し, $[A \mid \boldsymbol{b}]$ の簡約化を $[A' \mid \boldsymbol{b}']$ とすると

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$$

である. 拡大係数行列の行基本変形が対応する連立 1 次方程式の同値変形になっているからである.

拡大係数行列の簡約化のパターンに応じて, 解がないこと, 1 つの解, あるいは一般解が求まる.

## 6.1　解がないパターン

いくつか変数が少ない例を示す. これらを読んだあと教科書 p.29 の例題 2.3.1 を読んでほしい. 解がない場合は前回説明した方法なら前半の「階段化」だけで解がないことがわかる.

**例 6.1**　次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

この連立 1 次方程式は見ただけで矛盾していて解がないことがわかるが, 拡大係数行列を簡約化をしていくとさらにそのことがあらわになる.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | −1 | 4 | 拡大係数行列 |
| 2 | −2 | 7 | |
| 1 | −1 | 4 | 軸の行 |
| 0 | 0 | −1 | ② − ① × 2 |

最後の行列の 2 行目は対応する連立 1 次方程式において $0 = -1$ を意味する. すなわち矛盾するので解はない.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

なので元の連立 1 次方程式も解をもたいない.

簡約化を最後までやると $0 = 1$ を意味する行を含む行列が得られる.

行基本変形は列ごとの操作になっているので, 列をいくつか取り除いても正しい基本変形になっている. 拡大係数行列の基本変形で最後の行を忘れると係数行列の基本変形になっている.

$$
\begin{array}{rr|r l}
\hline
1 & -1 & 4 & \text{最後の列を無視すると係数行列} \\
2 & -2 & 7 & \\
\hline
1 & -1 & 4 & \text{軸の行} \\
0 & 0 & -1 & ② - ① \times 2 \\
\hline
\end{array}
$$

これから

$$
\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = 1, \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 7 \end{bmatrix} = 2
$$

である. 右辺に対応する最後の列によって拡大係数行列の階数が係数行列の階数より 1 増えるかどうか決まる.

少し別の見方をしてみる. 座標平面の点は 2 次元のベクトルで表される. $x_1 = y, x_2 = x$ と書き直すともとの連立 1 次方程式は直線 $y = x + 4$ と $2y = 2x + 7$ の交点をもとめる問題である. この 2 直線は平行で交わらないので交点はない.

**例 6.2**　次の連立 1 次方程式を解け. (p.33 問題 2.3 (3))

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{rrr|r l}
\hline
1 & -1 & 1 & 5 & \text{拡大係数行列} \\
-1 & 0 & -3 & -4 & \\
1 & 2 & 7 & 3 & \\
\hline
1 & -1 & 1 & 5 & \\
0 & -1 & -2 & 1 & ② + ① \\
0 & 3 & 6 & -2 & ③ - ① \\
\hline
1 & -1 & 1 & 5 & \\
0 & -1 & -2 & 1 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & ③ + ② \times 3 \\
\hline
\end{array}
$$

最後の拡大係数行列は次の連立 1 次方程式に対応しており, この連立 1 次方程式はもとの連立 1 次方程式と同値である.

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

左右の 1 番下の成分に着目すると $0 = 1$ を意味しており矛盾である. したがって, 解はない. また係数行列の階数は 2, 拡大係数行列の階数は 3 である.

一般に次のことがわかるであろう. 教科書 p.28 定理 2.3.1 の半分 (片方向) である. 教科書 p.28 の説明も読んでほしい.

**定理 6.3**　$m \times n$ 行列 $A$ と $m$ 次 ($m$ 行) の列ベクトル $\boldsymbol{b}$ が与えられたとする. $\mathrm{rank} A < \mathrm{rank}[A \mid \boldsymbol{b}]$ とすると $\mathrm{rank}[A \mid \boldsymbol{b}] = \mathrm{rank} A + 1$ で連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解はない.

## 6.2　解があるパターン

連立 1 次方程式の拡大係数行列に行基本変形を施して簡約化したとき, $0 = 1$ を意味する行が出てこなければその方程式には解がある. 簡約化まで変形すると一般的な解が求まる.

**例 6.4**　次の連立 1 次方程式を解け.

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}
$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | −1 | 4 | 拡大係数行列 |
| 2 | −2 | 8 | |
| 1 | −1 | 4 | 軸の行 |
| 0 | 0 | 0 | ② − ① × 2 |

1 行目の 2 倍が 2 行目である. 方程式で考えると一方の条件式からもう 1 つの条件が出てくる. 簡約化あるいは階段化することにより無駄な条件が消去される.

結局, もとの連立 1 次方程式は $x_1 - x_2 = 4$ という 1 つの方程式と同値になった. 2 行目は $0 = 0$ なのでいつも成り立つことなので必要ない.

主成分に対応する変数をまずリストアップする. この場合は $x_1$ だけである.

残っているのは $x_2$. $x_2$ の値は好きに決めてよい. $x_1 = 4 + x_2$ と $x_2$ の 1 次関数として解けている. $x_2$ の値をどのように与えても主成分に対応する $x_1$ が求まる.

$x_2 = c$ ($c$ は任意定数) とおくと

$$\begin{cases} x_1 = 4 + c \\ x_2 = \quad\ \ c \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

幾何的には点 $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ を通り方向ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ をもつ直線が解の集合になっている.

**例** 6.5　次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rrr|rl}
\hline
1 & -1 & 1 & 5 & \text{拡大係数行列} \\
-1 & 0 & -3 & -4 & \\
1 & 2 & 7 & 2 & \\
\hline
1 & -1 & 1 & 5 & \\
0 & -1 & -2 & 1 & ② + ① \\
0 & 3 & 6 & -3 & ③ - ① \\
\hline
1 & -1 & 1 & 5 & \\
0 & -1 & -2 & 1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & ③ + ② \times 3 \\
\hline
1 & -1 & 1 & 5 & \\
0 & 1 & 2 & -1 & ② \times (-1) \\
0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
1 & 0 & 3 & 4 & ① + ② \\
0 & 1 & 2 & -1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
\end{array}$$

簡約化から最初の式は次の連立 1 次方程式と同値である.

$$\begin{cases} x_1 \qquad + 3x_3 = 4 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

各行の主成分に対応する変数 (一番左に現れる変数) は $x_1, x_2$ である. このような変数を**従属変数**とよぶ.

それ以外の変数は $x_3$ で, どの行の主成分にも対応していない. このような変数を**自由変数**とよぶ.

従属変数 $x_1, x_2$ は自由変数 $x_3$ の 1 次式で書ける. 移項すればよい.

$x_3 = c$ ($c$ は任意) とおくと $x_1, x_2$ は $c$ の 1 次式で書けて

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3c \\ -1-2c \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

簡約化によりもとの連立 1 次方程式は 2 つの式になった. 3 変数の方程式 ($ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$) は 3 次元の座標空間での平面の方程式である. 簡約化により 2 つの平面の共通部分が解の集合になることがわかり, さらに具体的に空間内の直線のベクトル表示が得られてることがわかる.

次に教科書の p.30 例題 2.3.2 を挙げる.

**例 6.6**　次の連立 1 次方程式を解け. (p.30 例題 2.3.2)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

拡大係数行列を簡約化すると次の行列を得る. 変形は教科書を見てほしい.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

対応する連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \phantom{+ x_3} + 3x_4 \phantom{+ x_5} = 2 \\ \phantom{x_1 - 2x_2 +} x_3 - x_4 \phantom{+ x_5} = -1 \\ \phantom{x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 +} x_5 = 1 \end{cases}$$

各行の主成分に対応する $x_1, x_3, x_5$ が従属変数.

これら以外の $x_2, x_4$ が自由変数.

$x_2 = c_1, x_4 = c_2$ とおくと ($c_1, c_2$ は任意定数) ($x_1, x_3, x_5$ は $c_1, c_2$ の 1 次式で書けて)

$$\begin{cases} x_1 = \ \ 2 + 2x_2 - 3x_4 = \ \ 2 + 2c_1 - 3c_2 \\ x_3 = -1 + \ \ x_4 = \ -1 + c_2 \\ x_5 = \ \ 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \ \ 2 + 2c_1 - 3c_2 \\ x_2 = \qquad c_1 \\ x_3 = -1 \qquad + \ c_2 \\ x_4 = \qquad\qquad c_2 \\ x_5 = \ \ 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

変数が 5 つあるが, 本質的に 3 つの独立な制約条件のもとで勝手にきめてよい自由変数は 2 つになるという仕掛けである. 本質的に独立な方程式の数は (拡大) 係数行列の階数である.

解の自由度 (任意定数の個数 = 自由変数の個数) が 1 以上のとき, 解はたくさんある. 解が存在する場合で自由変数がない, すなわち任意定数が解に現れないとき解はちょうど 1 つになる. 次の定理 (教科書 p.31 定理 2.3.2) がわかる.

**定理** 6.7　$n$ 変数の連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

に解がただ 1 つ存在するための必要十分条件は

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}[A \mid \boldsymbol{b}] = n$$

**例** 6.8　次の連立 1 次方程式を解け. (p.33 問題 2.3 (3) の変形)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{array}{rrr|rl}
\hline
1 & -1 & 1 & 5 & \text{拡大係数行列} \\
-1 & 0 & -3 & -4 & \\
1 & 2 & 8 & 3 & \\
\hline
1 & -1 & 1 & 5 & \\
0 & -1 & -2 & 1 & \text{②} + \text{①} \\
0 & 3 & 7 & -2 & \text{③} - \text{①} \\
\hline
1 & -1 & 1 & 5 & \\
0 & -1 & -2 & 1 & \\
0 & 0 & 1 & 1 & \text{③} + \text{②} \times 3 \\
\hline
1 & -1 & 0 & 4 & \text{①} - \text{③} \\
0 & 1 & 0 & -3 & \text{②} - \text{③} \times 2 \\
0 & 0 & 1 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & \text{①} + \text{②} \\
0 & 1 & 0 & -3 & \\
0 & 0 & 1 & 1 & \\
\hline
\end{array}
$$

最初の方程式は次と同値.

$$
\begin{cases}
x_1 = 1 \\
x_2 = -3 \\
x_3 = 1
\end{cases}
$$

## 6.3　同次形の連立 1 次方程式

$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のように右辺が 0 の連立 1 次方程式を**同次形**の連立 1 次方程式とよぶ. $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (零ベクトル) はこの方程式の 1 つの解になっている. これを**自明な解**とよぶ. 同次形の方程式に対し, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ となる解, すなわち自明な解と異なる解を**非自明解**とよぶ.

変数の数より係数行列の階数が小さければ非自明解をもつことがわかるであろう. 逆に変数の数と係数行列の階数が等しい場合は自明な解しかないことも先程の解の一意性に関する定理からわかる.

次の例は例 6.5 の右辺を零ベクトルにしたものである.

**例** 6.9　次の連立 1 次方程式を解け.

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{rrr|l}
\hline
1 & -1 & 1 & 0 \quad \text{拡大係数行列} \\
-1 & 0 & -3 & 0 \\
1 & 2 & 7 & 0 \\
\hline
1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & -2 & 0 \quad ② + ① \\
0 & 3 & 6 & 0 \quad ③ - ① \\
\hline
1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \quad ③ + ② \times 3 \\
\hline
1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 \quad ② \times (-1) \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 3 & 0 \quad ① + ② \\
0 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

最後の $\mathbf{0}$ の行は最初から最後まで $\mathbf{0}$ のままである. よって, 同次形の連立 1 次方程式を解く場合は係数行列だけ簡約化すればよい.

簡約化から最初の式は次の連立 1 次方程式と同値である.

$$
\begin{cases}
x_1 \qquad + 3x_3 = 0 \\
\qquad x_2 + 2x_3 = 0
\end{cases}
$$

(従属変数は $x_1, x_2$, 自由変数は $x_3$ なので) $x_3 = c$ ($c$ は任意) とおいて,

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3c \\ -2c \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

これは例 6.5 で出てきた解の 1 部になっている.

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列の簡約化を行うと係数行列の簡約化も自然に行っており, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解も得ている.

もう一度, 例 6.5 を見てほしい.

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

の一般解は

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

だったが, $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ は方程式の 1 つの解で (**特別解**や**特殊解**とよぶことがある), $\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ は右辺を 0 ばかりにした同次形の方程式の解になっている. このスカラー倍も同次形の方程式の解になっている. この解を**基本解**とよぶこともある.

教科書 p.30 例題 2.3.2

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

の一般解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

だった. これらのそれぞれのベクトルは次をみたす.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

このことは検算に使えるので利用してほしい.

## 6.4 その他

方程式が 1 つとか, 方程式に現れていない変数がある場合など勘違いしやすい例を挙げる. 実際にこのパターンの方程式を解く場面が線形代数 3 や線形代数 4 で出てくる.

**例** 6.10　$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4$

[主成分に対応する変数は $x_1$ (従属変数). それい以外の $x_2, x_3$ は自由変数.]

$x_2 = c_1, x_3 = c_2$ (これらは任意定数) とおくと, $x_1 = 4 + 2x_2 - 3x_3 = 4 + 2c_1 - 3c_2$ となるので

$$\begin{cases} x_1 = 4 + 2c_1 - 3c_2 \\ x_2 = \phantom{4 + 2}c_1 \\ x_3 = \phantom{4 + 2c_1 - 3}c_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**例** 6.11

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

拡大係数行列を簡約化すると

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

主成分に対応するのは $x_2$.

それ以外の $x_1, x_3$ が自由変数. ($x_1$ も自由変数になることに注意)

$x_1 = c_1, x_3 = c_2$ ($c_1, c_2$ は任意) とおくと, $x_2 = 1 + x_3 = 1 + c_2$.

$$\begin{cases} x_1 = \phantom{1 + {}}c_1 \\ x_2 = 1 \phantom{{}+c_1} + c_2 \\ x_3 = \phantom{1 + c_1 + {}}c_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# 7　第 7 回 まとめ

行列は連立 1 次方程式を解くための簡便な記法から出てきた概念と考えられる. 連立 1 次方程式を同値変形していくと解ける形に変形できる. 行列を使って連立 1 次方程式を表現すると, 連立 1 次方程式の同値変形は行列の行基本変形という変形になる.

## 7.1　行基本変形と連立 1 次方程式

この教科書では行基本変形は連立 1 次方程式の同値変形であるということを前面に出しており, 拡大係数行列の簡約化により, 連立 1 次方程式が解ける.

この教科書ではわざと避けているようにも見えるが, 実は行基本変形はある行列を左からかけていることになっている. 行基本変形は可逆な変形（行基本変形でもとにもどせる）なので, 行基本変形を実現する行列はその逆の操作を表す行列を左からかけるとかけても何も起きない行列になる. すなわち, それは単位行列になる.

次の定義は教科書 p.34 にある.

**定義** 7.1　$A, B$ を $n$ 次正方行列とする.

$$AB = BA = E_n$$

のとき, $B$ を $A$ の**逆行列**と呼ぶ. この定義より, $A$ は $B$ の逆行列になる. 逆行列がある行列を**正則行列**と呼ぶ. $A$ をかける効果を $B$ は打ち消すことができ, $B$ をかける効果を $A$ は打ち消すことができるということである. 英語では regular matrix で, 「普通の行列」という言い方になる.

## 7.2　基本変形と基本行列

行基本変形は次のような変形であった.

(1) 1 つの行を $c$ 倍する. ただし, $c \neq 0$.
(2) 2 つの行を入れ替える.
(3) 1 つの行に他の行の $c$ 倍を加える. ($c = 0$ でもよい)

考える行列が列ベクトルの場合を考える. 簡単のために 3 次の列ベクトルの行基本変形を考える.

第 1 行を $c$ 倍は

$$\begin{bmatrix} cx_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

第 1 行と第 3 行の交換は

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

第 2 行に第 1 行の $c$ 倍を加える変形は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ cx_1 + x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

行列を左からかけると列ごとに作用しているので

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

は

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

の第 2 行に 第 1 行 $\times c$ を加えるという行基本変形になっている. 他の行基本変形も同様である. 行基本変形を表す行列は単位行列にその変形を施して得られる行列になっていることに注意してほしい. あとでも考察するが, 意味を考えるとそうなるはずである.

一般に $n$ 次 ($n$ 行) の列ベクトルの行基本変形は $n$ 次の正方行列を左からかけていることになる. このような行列を**基本行列**とよぶ. さらにこの変形は行基本変形でもとにもどせる. もとにもどす変形も行列で書け, それらは互いに逆行列になっている. たとえば ② + ① $\times c$ と ② + ① $\times (-c)$ は逆の変形になっているが, これらを表す基本行列は (3 行の場合)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad と \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である. これらの積はどちらの順にかけても単位行列になる. 一般に, 基本行列は正則行列になる.

行列を別の行列に左からかけると右側の行列の各列ごとに作用しているので, 行基本変形は基本行列を左からかけていることになる.

$F$ を基本行列とし, $E$ を $F$ と同じ型の単位行列とする. $FE = F$ なので, 単位行列に行基本変形をほどこすと, その変形を表す基本行列が得られる. 上の例で, 1 行目を $c$ 倍する基本行列は単位行列の 1 行目を $c$ 倍したものになっていて, 1 行目と 3 行目を交換する基本行列は単位行列の 1 行目と 3 行目を交換して得られる行列で, 2 行目に 1 行目の $c$ 倍を加える基本行列は単位行列に対しこの変形を施した行列である.

行基本変形を繰り返すことは基本行列を左から何度もかけることと同じである. 基本行列は正則行列で, 正則行列の積は正則なので, 行基本変形を繰り返すことはある正則行列を左からかけていることになる. ここで, 行列の積の結合法則が重要な役割をはたしている.

行列 $A$ に行基本変形を $n$ 回ほどこして, $A'$ になったとする. 簡単のために $n = 3$ だったとする. すると基本行列 $F_1, F_2, F_3$ があり,

$$A \to F_1 A \to F_2(F_1 A) \to F_3(F_2(F_1 A)) = A'$$

という行基本変形の列があることになる.

$$A' = F_3(F_2(F_1 A)) = (F_3(F_2 F_1))A$$

$F = F_3 F_2 F_1$ とおくと $F$ は正則行列 (正則行列の積は正則) で $FA = A'$ である. この議論は $n = 3$ に限らず, 行基本変形を何回行っても成り立つ. 正確には数学的帰納法で証明できる. 定理として述べておこう.

**定理 7.2**　$A$ に行基本変形を繰り返し適用して $A'$ が得られたとするとある正則行列 $F$ が存在して, $FA = A'$ である.

このことからも行基本変形と連立方程式の関係がわかる.

**定理 7.3**　$[A \,|\, \boldsymbol{b}]$ に行基本変形を繰り返し適用して $[A' \,|\, \boldsymbol{b}']$ になったとする. このとき

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$$

$F[A \,|\, \boldsymbol{b}] = [A' \,|\, \boldsymbol{b}']$ となる正則行列 $F$ をとる. すると $FA = A'$, $F\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}'$. $F$ には逆行列があるので

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$$

がわかる.

まず, $F[A \,|\, \boldsymbol{b}] = [A' \,|\, \boldsymbol{b}']$ なので $FA = A'$, $F\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}'$ である.

左 $\Rightarrow$ 右の証明:

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と仮定する. 両辺に $F$ を左からかけると $F(A\boldsymbol{x}) = F\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}'$. 一方, $F(A\boldsymbol{x}) = (FA)\boldsymbol{x} = A'\boldsymbol{x}$. よって, $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$. (証明終)

右 $\Rightarrow$ 左の証明:

$A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ と仮定する. 両辺を書き換えると $(FA)\boldsymbol{x} = F\boldsymbol{b}$. 両辺に左から $F^{-1}$ をかけると, $F^{-1}(FA)\boldsymbol{x} = F^{-1}(F\boldsymbol{b})$. 両辺をそれぞれ変形すると $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. (証明終)

$[A \mid E]$ に行基本変形を繰り返して $[E \mid B]$ となったとする. この変形を表す正則行列を $F$ とすると $F[A \mid E] = [E \mid B]$. よって, $FA = E$, $F = FE = B$. $BA = E$ で $B = F$ は正則なので $A = B^{-1}$ で, これは正則である. すると $A^{-1} = B$ となる.

正則行列は簡約化すると単位行列になるので, 正則行列は基本行列の積で表せる.

ちなみに, 転置して考えると, 基本行列を別の行列に右からかけると列の基本変形ができる.