微分積分入門２　自習用補助教材

自宅待機などの諸事情により、授業に出席できない場合は、この補助教材を利用して自習を進めて下さい。これは数学教育部会が提供する補助教材です。自分が受講している授業の担当教員から自習用の補助教材が提供された場合は、そちらを利用して下さい。

微分積分入門２　目次

第１回

1　不定積分（教科書 p.111 〜 p.115）

高校の数学 II で学んだように, 関数 $f(x)$ に対して $F'(x) = f(x)$ をみたす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数といいます．また, 関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると, $f(x)$ の任意の原始関数は $F(x)+C$ (C は任意の定数）と表されます．そこで, $f(x)$ の原始関数の全体を $\int f(x)dx$ と表し, $f(x)$ の不定積分といいます．つまり, $\int f(x)dx = F(x) + C$ となります．したがって, 不定積分を求めることは, 微分の逆演算であるといえます．不定積分の説明（公式 4.1, 定理 4.1, 例題 4.1）を読んで問 4.1 と問 4.3 の (1)〜(3) を解きましょう．なお, 公式 4.2, 問 4.2, 4.3(4) は逆３角関数に関係するものですから読み飛ばして下さい.

2　定積分（教科書 p.115 〜 p.122）

曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = a$, $x = b$ および x 軸で囲まれた部分の面積を,（x 軸より上側の部分は正の値, 下側の部分は負の値として加え合わせて）$\int_a^b f(x)dx$ で表し, $f(x)$ の区間 $[a, b]$ における定積分といいます. 高校の数学 II では, 関数 $f(x)$ のみたすべき仮定をはっきりと述べませんでしたが, ここでは $f(x)$ が連続であることを大前提として仮定します. この節で重要なのは定理 4.3 と 4.4 で, これらは高校の数学 II でも学んだ重要な性質です. この 2 つの定理は, 定理 4.2（積分に関する平均値定理）を用いて証明されますが, 数学 II では定理 4.2 を証明せずに黙って使っています. p.115〜p.120 までの理論的な話が（ある程度）理解できれば, 定積分の計算に進みましょう. 例題 4.2, 4.3 を読んで問 4.6 と 4.7 を解きましょう.

第 2 回

3　置換積分法（教科書 p.123 〜 p.127）

置換積分法は, 1Q の微分積分入門 1 で学んだ「合成関数の微分法」を利用して, 積分を計算する方法です. 置換積分法の説明（定理 4.6, 4.7, 例題 4.4〜4.7）を読んで問 4.8〜4.12 を解きましょう. 置換積分法の計算に慣れるようにしっかり練習しましょう.

第 3 回

4　部分積分法（教科書 p.128 〜 p.131）

部分積分法は, 1Q の微分積分入門 1 で学んだ「積の微分法」を利用して, 積分を計算する方法です. 部分積分法の説明（定理 4.8, 4.9, 例題 4.8〜4.10）を読んで問 4.13〜4.15 を解きましょう. 部分積分法の計算に慣れるようにしっかり練習しましょう.

5　いろいろな関数の積分計算（教科書 p.132〜p.134）

関数を微分する場合とは違って, 積分を計算する場合には様々な工夫が必要になります. 例題 4.11〜4.13 を読んで問 4.16〜4.19 を解きましょう.

第４回

6　２変数関数（教科書 p.163）

高校までは $y = f(x)$ のように 1 つの変数 x の値を決めると, それに応じて y の値がただ 1 つ決まるような関数（1 変数関数）を扱いました. 大学では $z = f(x, y)$ のように 2 つの変数 x と y の値を決めると, それに応じて z の値がただ 1 つ決まるような関数（２変数関数）を扱います. 1 変数関数 $y = f(x)$ のグラフは xy 平面上の曲線ですが, ２変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフは xyz 空間内の曲面になります. 教科書の p.163 の説明を読みましょう.

7　偏微分と偏導関数（教科書 p.168〜p.170）

２変数関数 $f(x, y)$ を x について偏微分するとは, y を定数とみなして $f(x, y)$ を x の関数と考えて, x で微分することをいいます. 例えば, $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^3$ のとき, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y$ となります. ここで, $\frac{\partial f}{\partial x}$ は $f(x, y)$ を x について偏微分して得られる関数（x についての偏導関数）を表します. また, 記号 ∂ は「デル」と読みます. 同様に, ２変数関数 $f(x, y)$ を y について偏微分するとは, x を定数とみなして $f(x, y)$ を y の関数と考えて, y で微分することをいいます. 例えば, $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^3$ のとき, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 3y^2$ となります. ここで, $\frac{\partial f}{\partial y}$ は $f(x, y)$ を y について偏微分して得られる関数（y についての偏導関数）を表します. 偏導関数を表す記号にはいろいろなものがあります. 例えば, $\frac{\partial f}{\partial x}$ を f_x で表し, $\frac{\partial f}{\partial y}$ を f_y で表すことも多いです. 教科書の p.168, p.169 の説明と例題 5.3 を読んで, 問 5.3, 5.4 を解きましょう.

第 5 回

8　高次偏導関数（教科書 p.183〜p.185）

1 変数関数 $f(x)$ について，2 次導関数 $\frac{d^2f}{dx^2}$ を考えた場合と同様に，2 変数関数 $f(x,y)$ についても，2 次偏導関数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を考えることができます．ここで，$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ は $f(x,y)$ を x について 2 回偏微分することを意味し，$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ は $f(x,y)$ を x と y についてそれぞれ 1 回ずつ偏微分することを意味し，$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ は $f(x,y)$ を y について 2 回偏微分することを意味します．教科書 p.183, p.184 の説明（定理 5.7, 例題 5.7）を読んで, 問 5.10 を解きましょう．余力があれば, 教科書 p.185 の説明を読んで, 問 5.11 を解きましょう．

9　近似式（教科書 p.185〜p.188）

1 変数関数 $f(x)$ を $x = 0$ のまわりで多項式 $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ を用いて近似した場合と同様に，2 変数関数 $f(x,y)$ を $(x,y) = (0,0)$ のまわりで多項式 $c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + \cdots$ を用いて近似することができます．1 変数関数の場合は, $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ の両辺を x で微分して $x = 0$ とおくという操作を繰り返すことにより, $c_0 = f(0)$, $c_1 = \frac{df}{dx}(0)$, $c_2 = \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(0)$, $\cdots$ となることがわかりました．２変数関数の場合も同様に，$f(x,y) = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + \cdots$ の両辺を x と y で偏微分して $x = y = 0$ とおくという操作を繰り返して, $c_{00} = f(0,0)$, $c_{10} = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $c_{01} = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, $c_{20} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$, $c_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, $c_{02} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$, $\cdots$ となることがわかります．また，1 変数関数 $f(x)$ を $x = a$ のまわりで多項式 $c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$ を用いて近似した場合と同様に，2 変数関数 $f(x,y)$ を $(x,y) = (a,b)$ のまわりで多項式 $c_{00} + c_{10}(x-a) + c_{01}(y-b) + c_{20}(x-a)^2 + c_{11}(x-a)(y-b) + c_{02}(y-b)^2 + \cdots$ を用いて近似することができます．教科書 p.185〜p.188 の説明を読み, 問 5.12, 5.13 を解きましょう．

第 6 回

１０　極値問題（教科書 p.189〜p.194）

1 変数関数 $f(x)$ の場合は $\frac{df}{dx} = 0$ が極値をとるための必要条件でした. 同様に, 2 変数関数の場合は $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ が極値をとるための必要条件になります. 1 変数関数の場合は, $\frac{df}{dx}$ の符号の変化を調べて増減表を書くことにより, $\frac{df}{dx} = 0$ をみたす点で極値をとるかどうかを判定しました. しかし, 2 変数関数の場合は増減表を書くことができません. その代わりに, 2 次偏導関数を用いることにより $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ をみたす点で極値をとるかどうかを判定します. 教科書 p.189〜p.194 の説明（定理 5.9, 5.10, 例題 5.9, 5.10）を読み, 問 5.14, 5.15 を解きましょう.

第 7 回

１１　まとめ（教科書 p.159, p.160 および p.203〜p.206）

最後に, 教科書 p.159 の練習問題 4.2, 4.3 と p.204, p.205 の練習問題 5.2（ただし, 逆 3 角関数の出てくる (6) は除く）, 5.5（ただし, 逆 3 角関数の出てくる (4) は除く）, 5.10（ただし, (3) と (4) は 2 次の項まででよい）, 5.11 を解いてみましょう. 何も見ないでこれらの問題ができれば微分積分入門 2 の内容を理解できたといえるでしょう.