微分積分入門１　自習用補助教材

自宅待機などの諸事情により、授業に出席できない場合は、この補助教材を利用して自習を進めて下さい。これは数学教育部会が提供する補助教材です。自分が受講している授業の担当教員から自習用の補助教材が提供された場合は、そちらを利用して下さい。

微分積分入門１　目次

第1回

1　関数の極限（教科書 p.47 〜 p.54）

(1) 高校の数学 II で学んだように、$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ は、関数 $f(x)$ において x が a と異なる値を取りながら a に限りなく近づくとき、$f(x)$ がある一定の値 α に限りなく近づくことを意味します。まず、教科書の p.47 〜 p.49 の極限の定義と性質に関する説明（定義 3.1、定理 3.1、例題 3.1、3.2）を読んで、問 3.3 と 3.4 を解きましょう。

(2) 教科書の p.50, 51 へ進み、関数 $f(x)$ において x が限りなく大きくなるときの極限に関する説明（定義 3.2、例題 3.3、例題 3.4）を読みましょう。ここでは、

無限大を意味する ∞ という記号が登場しますが、x が a に限りなく近づく場合と同じように（直感的に）考えればよいでしょう。問 3.5〜3.7 を解きましょう。

(3) x が a と異なる値を取りながら a に限りなく近づく場合でも、x が a よりも大きい値をとりながら a に近づく場合（右側極限）と、x が a よりも小さい値をとりながら a に近づく場合（左側極限）に分けて考えることがあります。教科書の p.52, 53 の説明（例題 3.5）を読んで、問 3.8 を解きましょう。

(4) 極限を調べる方法の 1 つに「はさみうちの原理」とよばれるものがあります。教科書の p.53, 54 の定理 3.2 と例題 3.6 を読んで、問 3.9 を解きましょう。

2　関数の連続（教科書 p.54 〜 p.57）

(1) 関数のグラフを書いたとき、途中で切れ目が生じたり穴が空いたりすることがなく、連続的につながっているとき関数は連続であるといいます。教科書の p.54 〜 p.56 の関数の連続性の定義と性質に関する説明（定義 3.3、例題 3.7）を読んで、問 3.10 を解きましょう。

(2) 連続関数はいろいろな性質をもっています。教科書の p.56 の定理 3.3 は「最大値・最小値の存在定理」とよばれ、定理 3.4 は「中間値の定理」とよばれていて、どちらもよく利用されています。例題 3.8 を読んで、問 3.11 と 3.12 を解きましょう。

第 2 回

3　導関数（教科書 p.58 〜 p.61）

高校の数学 II で学んだように、関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとき、$x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $(a, f(a))$ における接線の傾きを表します。また、関数 $f(x)$ がすべての x に対して微分可能であるとき、$f'(x)$ を $f(x)$ の導関数といいます。教科書の p.58〜p.61 の説明（定理 3.5、

例題 3.9、3.10）を読んで問 3.13〜3.16 を解きましょう。

4　導関数の計算公式（教科書 p.62 〜 p.65）

高校の数学 II では、$\{f(x)+g(x)\}' = f'(x)+g'(x)$ と $\{kf(x)\}' = kf'(x)$ という計算公式を学びました。ここでは、$\{f(x)g(x)\}'$ と $\{f(x)/g(x)\}'$ に関する計算公式（積の微分法と商の微分法）が登場します。教科書の p.62〜p.65 の説明（定理 3.6〜3.8、例題 3.11〜3.13）を読んで問 3.17、3.18 を解きましょう。

第 3 回

5　合成関数と逆関数の微分法（教科書 p.7〜p.10、p.66 〜 p.69）

(1)　2 つの関数 $y = f(u)$ と $u = g(x)$ があるとき、関数 $y = f(g(x))$ を $y = f(u)$ と $u = g(x)$ の合成関数といいます。教科書 p.7、p.8 の合成関数に関する説明を読み、問 1.2、1.3 を解きましょう。

(2)　$y = f(x)$ は x を決めると y が決まることを意味していますが、見方を逆に変えて、y を決めると x が決まるというように考える場合があります。関数 $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ とは、このような逆の見方によって定義されるものです。教科書 p.8〜p.10 の逆関数に関する説明（定理 1.2、例題 1.1）を読み、問 1.4、1.5 を解きましょう。

(3)　合成関数 $f(g(x))$ の導関数 $\{f(g(x))\}'$ と逆関数 $f^{-1}(x)$ の導関数 $\{f^{-1}(x)\}'$ を計算する公式が登場します。教科書の p.66〜p.69 の説明（定理 3.9、3.10、例題 3.14〜3.18）を読んで問 3.19〜3.23 を解きましょう。公式が正確に使えるようにしっかり練習しましょう。

第４回

6　３角関数、指数関数、対数関数の微分（教科書 p.70〜p.73、p.75 〜 p.78）

(1)　３角関数の極限に関する公式 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を証明した後に、３角関数の導関数の計算公式 $(\sin x)'=\cos x,\ (\cos x)'=-\sin x,\ (\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ を導きます。教科書の p.70〜p.73 の説明（公式 3.1、例題 3.19〜3.21）を読んで問 3.24、3.25 を解きましょう。なお、教科書 p.74 の逆３角関数の微分法については読む必要はありません。

(2) 指数関数 $f(x)=a^x$ に対して a の値をうまく選ぶと、$f(x)=a^x$ の $x=0$ における微分係数は $f'(0)=1$ をみたします。この値を e と表します。e は自然対数とよばれ、その値は $e=2.718\cdots$ であることが知られています。ここでは、指数関数の導関数の計算公式 $(e^x)'=e^x$ を導いた後に、逆関数の微分法の公式を用いて対数関数の導関数の計算公式 $(\log_e x)'=1/x$ を導きます。教科書の p.75〜p.78 の説明（公式 3.2、3.3、例題 3.23〜3.25）を読んで問 3.27〜3.30 を解きましょう。

第５回

7　接線と平均値の定理（教科書 p.79〜p.83）

(1) 関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ が関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(a,f(a))$ における接線の傾きを表すことから、点 $(a,f(a))$ を通る接線の方程式を求めることができます。また、点 $(a,f(a))$ を通り接線に直交する直線（法線という）の方程式も求められます。教科書の p.79、p.80 の説明（定理 3.11、3.12、例題 3.26）を読んで問 3.31、3.32 を解きましょう。

(2) 微分法の理論的な基礎を与える「ロルの定理」と「平均値の定理」が登場します。教科書の p.80、p.81 の説明（定理 3.13）を読んで問 3.33 を解きましょう。教科書の p.82、p.83 で与えられるロルの定理と平均値の定理の証明は、単なる計

算問題とは違う深みがあります。

８　関数の増減と極値（教科書 p.84〜p.87）

高校の数学 II では、関数 $f(x)$ の導関数を求めた後に、関数の増減表をつくり、関数の極値を求めることを学びました。ここでは、$y = x^3 - 2x + x - 1$ のような 3 次関数だけでなく、もっと一般的な $y = \cos x + x \sin x$ のような関数について、増減表をつくり極値を求めています。教科書の p.84〜p.87 の説明（定理 3.15、3.16、例題 3.27、3.28）を読んで問 3.34〜3.36 を解きましょう。

第 6 回

９　曲線の凹凸（教科書 p.90〜p.95）

(1) 関数 $y = f(x)$ を微分して $y' = f'(x)$ を求めた後に、さらに $y' = f'(x)$ を微分して $(y')' = \{f'(x)\}'$ を求めます。結果的に、関数 $y = f(x)$ を 2 回微分したことになりますが、この 2 回微分して得られる関数を $y = f(x)$ の第 2 次導関数といい、$y'' = f''(x)$ のように表します。教科書の p.90 の説明を読んで問 3.38 を解きましょう。余力があれば、教科書 p.90、p.91 の第 n 次導関数についての説明（例題 3.29）を読んで問 3.39 を解いてみるとよいでしょう。

(2) 高校の数学 II で学んだように、関数を 1 回微分して導関数を求めてその正負を調べると、関数の増減がわかります。ここでは、更にもう 1 回微分して第 2 次導関数を求めてその正負を調べると、関数のグラフの曲がり具合がわかることを学びます。これらの結果を合わせると、より正確に関数のグラフの概形を描くことができます。例えば、2 次関数 $y = ax^2$ $(a > 0)$ については、$y' = 2ax$ より $x < 0$ で減少し、$x > 0$ で増加することがわかります。さらに、第 2 次導関数を求めると $y'' = 2a > 0$ となりますが、この 2 次関数のグラフは下に凸（上に凹）です。教科書の p.91〜p.95 の説明（定義 3.4、定理 3.19、例題 3.30、3.31）を読んで問 3.40、3.41 を解きましょう。

１０　近似式（教科書 p.96〜p.102）

３角関数の極限に関する公式 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ は x の値が $x=0$ に近いとき、$\sin x$ と x の値がほぼ等しいということを意味しています。つまり、$x \fallingdotseq 0$ のとき $\sin x \fallingdotseq x$ という近似式が成り立ちます。ここでは、もっと一般の関数に対して、テイラー展開（マクローリン展開）という方法を用いて近似式をつくる方法を学びます。教科書の p.96〜p.102 の説明（定理 3.20、3.21、例題 3.32）を読んで問 3.42〜3.43 を解きましょう。例題 3.32 と問 3.43 では３次の項まで展開していますが、２次の項までの展開ができればよいと思います（余力があれば３次、４次と計算してみて下さい)。また、近似式を使うときは誤差がどのくらい生じるのかも考える必要があるのですが、それはやや難しいので割愛します。

第７回

１１　まとめ（教科書 p.107〜p.110）

最後に、教科書の p.107〜p.110 の練習問題の 3.1、3.6〜3.9、3.13（２次の項までの展開でよい。(4) は除く）を解いてみましょう。何も見ないでこれらの問題ができれば微分積分入門１の内容を理解できたといえるでしょう。