微分積分 2 自習用資料

この資料について

この資料は微分積分 2 の自習用の資料である．微分積分 2 の教科書は

- 明解 微分積分 (南 就将 他 著, 数学書房) (理学部数学科・物理学科)
- 微分積分講義 (南 和彦 著, 裳華房) (工学部, 医学部医学科)
- 微分積分学序論 (林 平馬 他 著, 学術図書) (上記以外の学部・学科)

のように指定されているが, この資料は主に「微分積分学序論」 (林 平馬 他 著, 学術図書) の内容に沿った形で書かれている．但し, 章立てや定理の番号等は異なっていることに留意されたい．定理等に関しては証明は与えていない．そのため, この資料は「微分積分講義」(南 和彦 著, 裳華房) の参考資料としては役立つかもしれないが, 「明解 微分積分」(南 就将 他 著, 数学書房) の参考資料としては内容的に不足していると思われる．この点については御容赦いただき, 他の書籍等を参考にしていただきたい．

質問や不明な点等があれば, 自分のクラスの担当教員に質問するか, 学修支援室を利用してほしい．

1　偏微分法

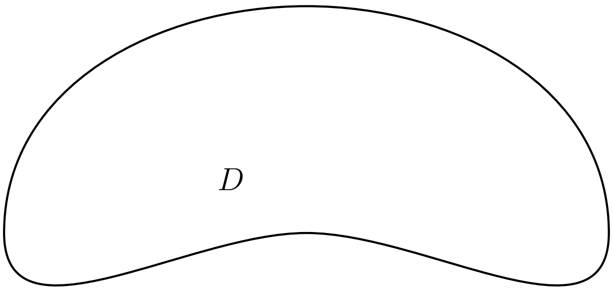
2Q では 2 変数関数の偏微分法とその応用について勉強する．偏微分を大まかに言うと，(2 変数とは限らない) 多変数関数において微分したい変数以外の変数は定数と思って微分する操作のことである．ここでは 2 変数関数に焦点を絞り，2 変数関数の極限，連続性を説明した後，偏微分法やその応用について述べる．

2 変数関数の偏微分法について十分理解できれば，3 変数以上の多変数関数の偏微分法についても理解しやすいであろう．

1.1　2 変数関数

ここでは 2 変数関数を扱うために必要な事柄について簡単に述べる．まず，いくつかの記号を用意する[1]．$\mathbb{R}^2$ は平面全体を表す．$D \subset \mathbb{R}^2$ は集合 D が $\mathbb{R}^2$ の部分集合であることを意味する．点 (a, b) が D に属することを $(a, b) \in D$ で表す．

$D \subset \mathbb{R}^2$ とし，D の形は図のようになっているとする．



このとき D を囲む曲線は D を机やテーブルに見たときの縁にあたる部分である．この縁の部分を**境界**といい，∂D と表す．

定義 1.1. $D \subset \mathbb{R}^2$ とする．

(1) D が**開集合**であるとは ∂D を含まない集合をいう．

(2) D が**閉集合**であるとは ∂D を含む集合をいう．

この定義はかなり直観的であるが，この資料で扱う範囲においてはこれで十分である．

例 1.1. (1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x^2 + y^2 < 1\}$ とすると D は開集合である．実際 D はその境界 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ を含まない．

(2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とすると D は閉集合である．この場合 D はその境界 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ を含んでいる．

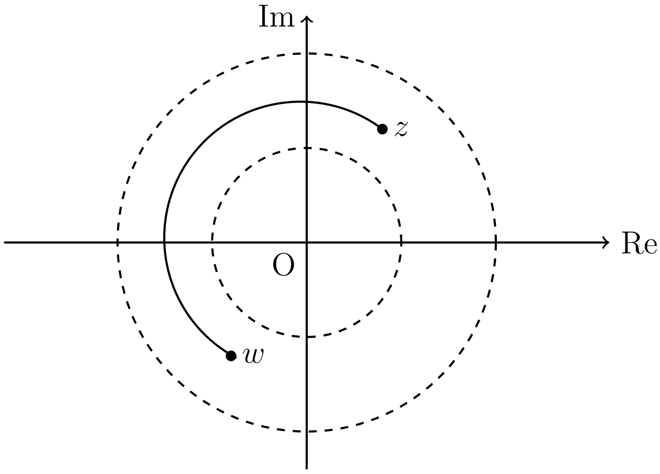
[1] 1Q で用いた記号は断りなく使うので忘れた人は再度確認しておいてほしい．

定義 1.2. $D \subset \mathbb{R}^2$ とする. D が**連結**であるとは, D に含まれる任意の 2 点が D を通る曲線 (または直線, 折れ線) で結べるときをいう.

上の定義において「連結」とは集合が 1 つに繋がっていることの数学的な表現の 1 つである.

例 1.2. (1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ とすると D は連結である. 実際 D 内の任意の 2 点は D 内を通る線分で結べる.

(2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid 1/4 < x^2 + y^2 < 1\}$ とすると D は連結である. 下図を参考にしてほしい.



大きな破線の円周は $x^2 + y^2 = 1$, 小さい方は $x^2 + y^2 = 1/4$.

簡単なので, 連結でない集合とはどういうものか自分で考えてみてほしい.

定義 1.3. $D \subset \mathbb{R}^2$ とする. D が連結な開集合のとき, D を**領域**という. D が連結な閉集合のとき, D を**閉領域**という.

例 1.2 で挙げた集合はいずれも領域である. 特に (2) のような領域を**円環領域**という.

定義 1.4. $D \subset \mathbb{R}^2$ を領域, または閉領域とする. D に対して $D \subset \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < R^2\}$, または $D \subset [-R, R] \times [-R, R]$ となるような実数 $R > 0$ が取れるとき, D を**有界領域**, または**有界閉領域**という. ここで $[-R, R] \times [-R, R] = \{(x, y) \mid -R \leq x, y \leq R\}$ とする.

例 1.2 で挙げた集合はいずれも有界領域である.

例 1.3. $D = \{(x, y) \mid -1 < x < 1, y \in \mathbb{R}\}$ は領域であるが, 有界領域ではない.

2 つ以上の変数をもつ関数を扱うのは初めてなので, 2 変数関数の定義を与えておく.

定義 1.5. $D \subset \mathbb{R}^2$ とする. 各 $(x, y) \in D$ に対して実数 z がただ *1* つだけ対応するとき, その対応 $D \ni (x, y) \mapsto z \in \mathbb{R}$ を D で定義された**関数**といい, $z = f(x, y)$ と表す. D を $f(x, y)$ の**定義域**, $f(D) = \{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$ を $f(x, y)$ の**値域**という.

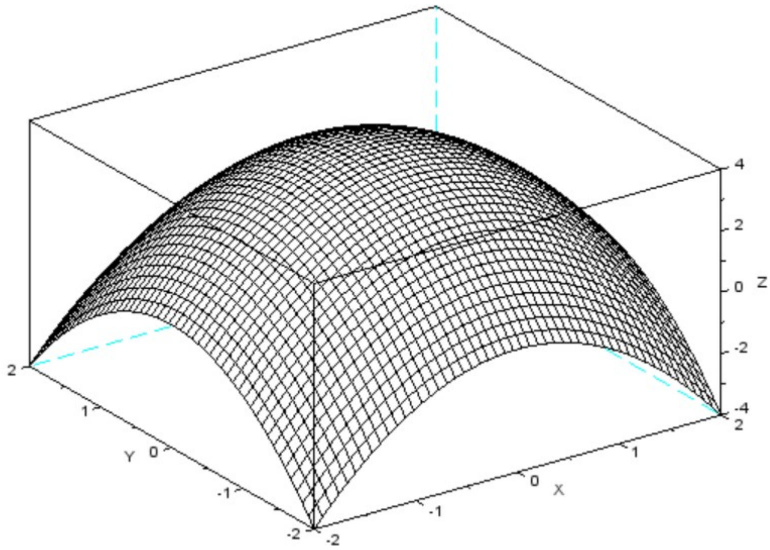
2 変数関数のグラフの定義とその描き方について説明する. 1 変数関数 $y = f(x)$ $(x \in I,\ I \subset \mathbb{R})$ のグラフは xy-平面上の直線や曲線になるが, 実際の定義は平面上の集合 $\{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ を $y = f(x)$ のグラフと呼ぶ. これを 2 変数関数の場合に適用する.

定義 1.6. $D \subset \mathbb{R}^2$ とし, $f(x, y)$ を D で定義された関数とする. このとき, 集合 $\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$ を $f(x, y)$ の**グラフ**という.

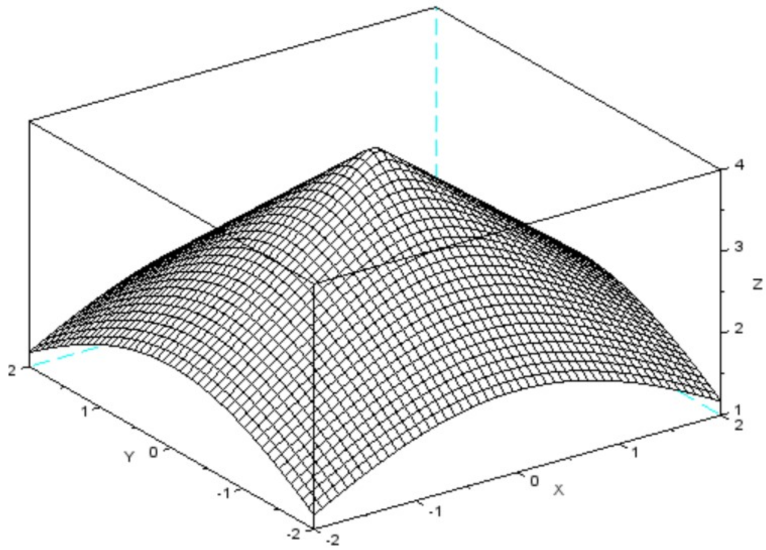
一般には 2 変数関数のグラフは 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の平面や曲面になる. そのようなグラフを描くことはかなり難しいが, 最近はコンピュータを使って簡単に描くことができる. しかし, 空間的な感覚を養うには自分の手で描く方がよい.

$z = f(x, y)$ に対して $f(x, y) = c$ (c は定数) を満たす点 (x, y) の集合は xy-平面内の曲線をなす. これを (高さ c の) **等高線**という. c を変化させながら, その等高線を xyz-空間の平面 $z = c$ に描いていくと, ある程度は $z = f(x, y)$ のグラフの様子を把握することができる. 次の例ではコンピュータにグラフを描かせている.

例 1.4. (1) $z = 4 - x^2 + y^2$ のグラフの概形を下図に示す.



(2) $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ のグラフの概形を下図に示す.



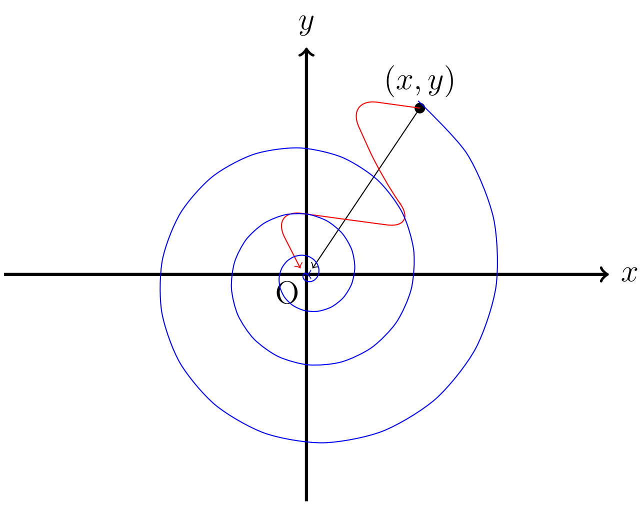
この例に挙げた 2 つの関数のグラフの概形の違いが把握できていない人が意外と多い. 上で描いた 2 つのグラフにおいて, 特に $(x, y) = (0, 0)$ の近くでのグラフの形の違いを理解してほしい. 図を見ても納得できない人は次のように考えればよいかもしれない, 上の例で (1) は放物線 $z = 4 - x^2$ のグラフを zx-平面に描き, それを z 軸を中心に 1 回転させたものである. (2) は $z = 4 - |x|$ のグラフを zx-平面に描き, それを z 軸を中心に 1 回転させたものである.

1.2 2 変数関数の極限と連続

$\mathbb{R}^2$ 上の点 (x, y) が点 (a, b) に限りなく近づくとは

$$(x, y) \neq (a, b) \text{ かつ } \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

を意味し, $(x, y) \to (a, b)$ と書く. これは 2 点 (x, y), (a, b) の間の距離が限りなく 0 になる, ということである. これには (x, y) の (a, b) への近づき方には依っていないことに注意する. 言い方を変えると (x, y) の (a, b) へのあらゆる近づき方を想定している. 実際, $(x, y) \to (a, b)$ のとき, (x, y) の (a, b) への近づき方には下図のような多様性がある.



2 変数関数の極限を定義する.

定義 1.7. $D \subset \mathbb{R}^2$ とし, $f(x,y)$ を D で定義された関数とする. 点 (x,y) が D 内にいながら点 (a,b) に限りなく近づくとき, $f(x,y)$ がある実数 α に限りなく近づくならば, $(x,y) \to (a,b)$ のとき, $f(x,y)$ は α に**収束する**, または α は $(x,y) \to (a,b)$ のとき, $f(x,y)$ の**極限値**といい,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \alpha \text{ または } f(x,y) \longrightarrow \alpha \quad ((x,y) \to (a,b))$$

と書く.

1 変数関数の極限を定義する際にも述べたが, この定義には重要な点が 2 つある. 1 つ目は点 (a,b) は D に属していなくてもよいということ, 2 つ目は極限値 α は (x,y) の (a,b) への近づき方には無関係に定まるということである

極限値の計算例をいくつか挙げる.

例 1.5. (1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}(x^2+xy+y^2) = 3$.

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(2,2)}(x+y) = 4$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+3y^2}$ は存在しない. $y = mx$ のもとで $(x,y) \to (0,0)$ とすると

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+3y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+m^2)}{x^2(1+3m^2)} = \frac{1+m^2}{1+3m^2}$$

最右辺の $\dfrac{1+m^2}{1+3m^2}$ は m の値に応じて変わるので, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+3y^2}$ は存在しない.

この例からわかるように, 2 変数の極限の計算は 1 変数の場合とは異なる. 2 変数の場合, (1.1) に注意して, 与えられた時を (x,y) と (a,b) の距離に関する極限を計算するように変形する.

例 1.6. (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$ を求める. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと $(x,y) \to (0,0)$ は $r \to 0$ となり,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4(\cos^4\theta - \sin^4\theta)}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^2(\cos^4\theta - \sin^4\theta) = 0.$$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ は存在しない. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと $(x,y) \to (0,0)$ は $r \to 0$ となり,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r^2} = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta.$$

となり, θ に応じて最右辺の値は異なる. よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ は存在しない.

関数の極限については次の結果が基本的である.

定理 1.1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \alpha \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = \beta$ とする. このとき, 以下が成り立つ.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} (kf(x,y) + lg(x,y)) = k\alpha + l\beta \quad (k,\ l$ は定数)

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = \alpha\beta$

(3) $\beta \neq 0$ ならば $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(,yx)}{g(x,y)} = \frac{\alpha}{\beta}$

関数の連続性を定義する.

定義 1.8. $D \subset \mathbb{R}^2$ を領域, $f(x,y)$ を D で定義された関数とする.

(1) $f(x,y)$ が $(a,b) \in D$ **で連続**であるとは

  (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ が存在する.

  (ii) (i) の極限が $f(a,b)$ に等しい.

 ときをいう.

(2) $f(x,y)$ が**領域** D **で連続**であるとは D の各点で連続であるときをいう.

定理 1.1 より, 次の定理が従う.

定理 1.2. 関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ が領域 D で連続ならば,

$$kf(x,y) + lg(x,y), f(x,y)g(x,y) \quad (k, l \text{ は定数})$$

は D で連続である. $\displaystyle\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ は $g(x,y) = 0$ となる $(x,y) \in D$ を除いて連続である.

1.3 偏微分係数と偏導関数

この小節では偏微分係数と偏導関数を定義する. 大まかにいうと, 偏微分とは微分したい変数以外の変数は定数と見做して微分する操作のことであり, 微分したい変数のみに関する関数の変化の様子を見ている.

定義 1.9. $D \subset \mathbb{R}^2$ を領域, $f(x,y)$ を D で定義された関数とする. $(a,b) \in D$ とする.

(1) $f(x,y)$ が $(a,b) \in D$ **で** x **に関して偏微分可能**であるとは

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

が存在するときをいう. この極限値を (a,b) **における**.x **についての偏微分係数**と呼び,

$$f_x(a,b), \ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

と書く.

(2) $f(x,y)$ が $(a,b) \in D$ **で** y **に関して偏微分可能**であるとは

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$$

が存在するときをいう. この極限値を (a,b) **における** y **についての偏微分係数**と呼び,

$$f_y(a,b), \ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

と書く.

(3) $f(x,y)$ が D **で** x **に関して偏微分可能**であるとは, $f(x,y)$ が D の各点で x に関して偏微分可能であるときをいう.

(4) $f(x,y)$ が D **で** y **に関して偏微分可能**であるとは, $f(x,y)$ が D の各点で y に関して偏微分可能であるときをいう.

$f(x,y)$ が x, y 両方の変数に関して偏微分可能であるとき, 単に偏微分可能ということにする. 偏微分係数の図形的な意味は次のようである. 曲面 $z = f(x,y)$ を平面 $y = b$ で切った切り口の曲線 $z = f(x,b)$ (x **曲線**という) の $x = a$ における接線の傾きが $f_x(a,b)$ である. 同様に, 曲面 $z = f(x,y)$ を平面 $x = a$ で切った切り口の曲線 $z = f(a,y)$ (y **曲線**という) の $x = a$ における接線の傾きが $f_x(a,b)$ である.

定義 1.10. $D \subset \mathbb{R}^2$ を領域, $f(x,y)$ を D で定義された関数とする.

(1) $f(x,y)$ が D **で** x **に関して偏微分可能**であるとき, $(x,y) \mapsto f_x(x,y)$ は D 上の関数となる. これを $f(x,y)$ **の** x **に関する偏導関数**といい,

$$f_x(x,y), \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

等と表す.

(定義 1.10 の続き)

(2) $f(x,y)$ が D で y **に関して偏微分可能**であるとき, $(x,y) \mapsto f_y(x,y)$ は D 上の関数となる. これを $f(x,y)$ **の** y **に関する偏導関数**といい,

$$f_y(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

等と表す.

定義 1.9, 1.10 より, $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$ を求めるには, y を定数と見做して x に関して微分すればよい, 同様に, $f(x,y)$ の偏導関数 $f_y(x,y)$ を求めるには, x を定数と見做して y に関して微分すればよい. このようなことより, 偏微分とは **1 つの変数に関する局所的な関数の変化の様子を見る**ための概念と言うことができる.

例 1.7. (1) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ とおくと,

$$f_x(x,y) = -2xe^{-(x^2+y^2)},\ f_y(x,y) = -2ye^{-(x^2+y^2)}.$$

(2) $f(x,y) = \cos(2x^2+3y^3)$ とおくと,

$$f_x(x,y) = -4x\sin(2x^2+3y^3),\ f_y(x,y) = -9y^2\sin(2x^2+3y^3).$$

注意 1.1. 3 変数以上の関数についても偏微分係数や偏導関数は同様に定義する.

1.4 全微分と接平面

前小節の最後に述べたように, 偏微分とは 1 つの変数に関する局所的な変化の様子を見るための概念であるが, 全微分は**全ての変数に対する局所的な関数の変化の様子を見る**概念と言える. この点において全微分が 1 変数関数の微分の拡張と言えるだろう[2].

$D \subset \mathbb{R}^2$ を領域, $z = f(x,y)$ を D で定義された偏微分可能な関数とする. x, y の増分をそれぞれ h, k とするとき $f(x,y)$ の変化の様子は平均値の定理を使うと

$$\begin{aligned}
&f(a+h,b+k) - f(a,b)\\
&\quad = f(a+h,b+k) - f(a,b+k) + f(a,b+k) - f(a,b)\\
&\quad = f_x(a+\theta_1 h, b+k)h + f_y(a, b+\theta_2 k)k \quad (0 < \theta_1, \theta_2 < 1).
\end{aligned}$$

更に, f_x, f_y は $(a,b) \in D$ で連続と仮定すると

$$\begin{aligned}
&f_x(a+\theta_1 h, b+k) = f_x(a,b) + \varepsilon_1(h,k),\\
&f_y(a, b+\theta_2 k) = f_y(a,b) + \varepsilon_2(h,k),\\
&\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_1(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_2(h,k) = 0,
\end{aligned}$$

[2] これには違和感を感じる人が多いかもしれない. 1 変数関数の概念を多変数関数に拡張する場合, 1 つしかない変数を「全ての変数に」と考える部分がなかなか受け入れにくいためと考えられる.

なので

$$
\begin{aligned}
&f(a+h,b+k)-f(a,b)=f_x(a,b)h+f_y(a,b)k+\varepsilon(h,k),\\
&\varepsilon(h,k)=\varepsilon_1(h,k)h+\varepsilon_2(h,k)k
\end{aligned}
$$

となる．ここで $\varepsilon(h,k)$ は

$$
\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0 \tag{1.2}
$$

を満たすことに注意する[3].

定義 1.11. $D\subset\mathbb{R}^2$ を領域とし，$f(x,y)$ を D で定義された関数とする．

(1) $f(x,y)$ が $(a,b)\in D$ **で全微分可能**であるとは，

$$
\begin{aligned}
&f(a+h,b+k)=f(a,b)+Ah+Bk+\varepsilon(h,k),\\
&\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0,
\end{aligned}
$$

を満たす実数 A, B が存在するときをいう．

(2) $f(x,y)$ が D **で全微分可能**であるとは D の各点において全微分可能であるときをいう．

全微分と偏微分の関係について述べる．

定理 1.3. $f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能とする．このとき，$f(x,y)$ は (a,b) で連続，かつ偏微分可能であり

$$
A=f_x(a,b),\ B=f_y(a,b)
$$

が成り立つ．

この定理は全微分可能な関数は連続, かつ偏微分可能であることを示している．次の例よって, この逆は成り立たないことがわかる．

例 1.8. $f(x,y)$ を

$$
f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)),\\ 0 & ((x,y)=(0,0)),\end{cases}
$$

とおく．すると $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ で連続, かつ偏微分可能である．特に

$$
f_x(0,0)=0,\ f_y(0,0)=-1
$$

[3] (1.2) は $\varepsilon(h,k)$ が 0 に収束する速さは $\sqrt{h^2+k^2}$ より速いことを意味する．

である．この $f(x,y)$ が $(0,0)$ で全微分可能とすると, 定理 1.3 より

$$
\begin{aligned}
(1.3) \qquad & f(h,k) = f_x(0,0)h + f_y(0,0)k + \varepsilon(h,k) = -k + \varepsilon(h,k), \\
& \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0
\end{aligned}
$$

を満たす．ところが,

$$
f\left(\frac{\sqrt{3}h}{2}, \frac{h}{2}\right) = h
$$

となり, (1.3) に反する．よって $f(x,y)$ は $(0,0)$ で全微分可能ではない.

偏導関数が連続ならば, 全微分可能である.

定理 1.4. *$D \subset \mathbb{R}^2$ を領域とし, $f(x,y)$ を D で定義された偏微分可能な関数とする．このとき, $f_x(x,y)$, $f_y(a,b)$ が (a,b) で連続ならば, $f(x,y)$ は (a,b) で全微分可能である.*

この定理については, 本小節の冒頭で説明したとおりである.

$f(x,y)$ が点 (a,b) を含む領域で偏微分可能で偏導関数は連続であるとする．このとき, (a,b) の近くでは

$$
\begin{aligned}
& f(a+h,b+k) = f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k + \varepsilon(h,k), \\
& \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,
\end{aligned}
$$

を満たす．ここで, $x = a+h$, $y = b+k$ とおくと, 上の式は以下のように書き換えることができる.

$$
f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \varepsilon(x-a, y-b).
$$

ここで,

$$
z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)
$$

とおくと, これは点 $(a,b,f(a,b))$ を通る平面を表す.

定義 1.12. $f(x,y)$ を点 (a,b) を含む領域で偏微分可能で偏導関数は連続とする．このとき

$$
z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)
$$

を曲面 $z = f(x,y)$ の点 $(a,b,f(a,b))$ における**接平面**という.

接平面は, 曲線に対する接線と同じように, 点 $(a,b,f(a,b))$ の近くの曲面 $z = f(x,y)$ の近似を与える.

1.5 合成関数の偏微分

この小節では合成関数の偏微分公式について述べる．1 変数関数の場合，$y = f(x)$, $x = \varphi(t)$ の合成関数の微分公式は

$$\frac{d}{dt}f(\varphi(t)) = f'(\varphi(t))\varphi'(t)$$

であった．これを 2 変数関数の場合に拡張したものが次の定理である．

定理 1.5. $I \subset \mathbb{R}$ を区間とし，$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ を I で微分可能とする．$z = f(x, y)$ は曲線 $\{(\varphi(t), \psi(t)) \mid t \in I\}$ を含む領域 D で偏微分可能で偏導関数は連続とする．このとき，合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ は I で微分可能で

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= f_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\end{aligned}$$

が成り立つ．

この定理を使った計算例を示す．

例 1.9. $z = f(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ で偏微分可能で偏導関数は連続とする．$x = \cos t$, $y = \sin t$ とおくと $z = f(\cos t, \sin t)$ の導関数は

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= f_x(\cos t, \sin t)(-\sin t) + f_y(\cos t, \sin t)\cos t \\ &= -f_x(\cos t, \sin t)\sin t + f_y(\cos t, \sin t)\cos t.\end{aligned}$$

定理 1.5 は 2 変数関数と 1 変数関数の合成関数に対する微分公式である．2 つの 2 変数関数の合成関数に対する微分公式は次のようになる．

定理 1.6. $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ は uv-平面上の領域 E で偏微分可能とする．$z = f(x, y)$ は集合 $\{(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \mid (u, v) \in E\}$ を含む xy-平面上の領域 D で偏微分可能で偏導関数は連続とする．このとき，合成関数 $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ は E で偏微分可能で

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ &= f_x(\varphi(u, v), \psi(u, v))\varphi_u(u, v) + f_y(\varphi(u, v), \psi(u, v))\psi_u(u, v), \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\ &= f_x(\varphi(u, v), \psi(u, v))\varphi_v(u, v) + f_y(\varphi(u, v), \psi(u, v))\psi_v(u, v),\end{aligned}$$

が成り立つ．

例 1.10. $z=f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ で偏微分可能で偏導関数は連続とする. $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくと $z=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ の導関数は

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= f_x(r\cos\theta,r\sin\theta)\cos\theta+f_y(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta\\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= -f_x(r\cos\theta,r\sin\theta)r\sin\theta+f_y(r\cos\theta,r\sin\theta)r\cos\theta.\end{aligned}$$

となる.

1.6 高次偏導関数

定義 1.13. $D\subset\mathbb{R}$ を領域とし, $f(x,y)$ を D で定義された偏微分可能な関数とする. このとき, $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ が D で偏微分可能ならば, それらの偏導関数

$$\frac{\partial}{\partial x}f_x(x,y),\ \frac{\partial}{\partial y}f_x(x,y),\ \frac{\partial}{\partial x}f_y(x,y),\ \frac{\partial}{\partial y}f_y(x,y)$$

を $f(x,y)$ の**第 2 次偏導関数**といい,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

あるいは

$$f_{xx}(x,y),\ f_{xy}(x,y),\ f_{yx}(x,y),\ f_{yy}(x,y)$$

などと書く. このとき $f(x,y)$ は 2 **回偏微分可能**という.

帰納的に考えて, $f(x,y)$ に対する 2^{n-1} 個の偏導関数が偏微分可能ならば, $f(x,y)$ は n **回偏微分可能**といい, これらの偏導関数を偏微分して得られる 2^n 個の関数を**第 n 次偏導関数**という.

定義 1.14. $f(x,y)$ が n 回偏微分可能で, n 次までの全ての偏導関数が連続ならば, $f(x,y)$ は C^n **級関数**であるという.

例 1.11. $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ とする. このとき

$$\begin{aligned}&f_x=2x\cos(x^2+y^2),\ f_y=2y\cos(x^2+y2),\\ &f_{xx}=2\cos(x^2+y^2)-4x^2\sin(x^2+y^2),\ f_{xy}=-4xy\sin(x^2+y^2),\\ &f_{yx}=-4xy\sin(x^2+y^2),\ f_{yy}=2\cos(x^2+y^2)-4y^2\sin(x^2+y^2).\end{aligned}$$

この例では f_{xy} と f_{yx} は同じ関数である. これに関しては次の定理が成り立つ

定理 1.7. $f(x,y)$ が C^2 級ならば, $f_{xy}=f_{yz}$ が成り立つ.

この定理と同様に, $f(x,y)$ が C^3 級であれば

$$f_{xxy}=f_{xyx}=f_{yxx}$$

等が成り立つ. 一般に C^n 級関数 $f(x,y)$ に対して第 k 次導関数 $(k=1,2,\ldots,n)$ は

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^r \partial y^{k-r}} \quad (k=0,1,2,\ldots,k)$$

等と書かれる.

偏微分の計算は記号が煩雑になることが多く, 形式的な記号を使ってできるだけ簡単に表示することが多い. 例えば $z=f(x,y)$ に対して

$$h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

を

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)$$

と表す. 高次偏導関数に関しては 2 項定理を応用して

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y)=\sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k h^{n-r}k^r \frac{\partial^n}{\partial x^{n-r}\partial y^r}f(x,y)$$

のように書く.

1.7 2 変数関数のテイラー展開

$D\subset\mathbb{R}^2$ を領域とし, $f(x,y)$ を D で定義された C^n 級関数とする. $(a,b)\in D$ と十分小さな h, $k\in\mathbb{R}$ に対して

$$F(t)=f(a+ht,b+kt)$$

は t に関して C^n 級である. このとき, 1 変数関数に対するテイラーの定理より

$$F(t)=F(0)+F'(0)t+\frac{1}{2!}F''(0)t^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(0)t^{n-1}+R_n,$$
$$R_n=\frac{1}{n!}F^{(n)}(\theta t)t^n \quad (0<\theta<1).$$

上の式で $t=1$ とし, 定理 1.5 を考慮すると次の定理を得る.

定理 1.8. $D \subset \mathbb{R}^2$ *1*を領域とし, $f(x,y)$ を D で定義された関数とする. 点 $(a,b) \in D$ と十分小さな $h,\ k \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial k}\right) f(a,b) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial k}\right)^2 f(a,b)$$
$$+ \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial k}\right)^{n-1} f(a,b) + R_n,$$
$$R_n = \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial k}\right)^n f(a+\theta h, b+\theta k) \quad (0 < \theta < 1).$$

この定理で $a = b = 0,\ h = x,\ k = y$ とおくと

$$f(x,y) = f(0,0) + \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) f(0,0) + \frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0)$$
$$+ \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial k}\right)^{n-1} f(0,0) + R_n,$$
$$R_n = \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(\theta x, \theta y) \quad (0 < \theta < 1),$$

を得る. この式において

$$\lim_{n \to +\infty} R_n = 0$$

となるならば,

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0)$$

となる. これを 2 変数のテイラー展開 (またはマクローリン展開) という.

例 1.12. $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ とする. このとき,

$$f_x = -2xe^{-(x^2+y^2)},\ f_x = -2ye^{-(x^2+y^2)},$$
$$f_{xx} = (-2+4x^2)e^{-(x^2+y^2)},\ f_{xy} = f_{yx} = 4xye^{-(x^2+y^2)},\ f_{yy} = (-2+4y^2)e^{-(x^2+y^2)}, \ldots$$

となるので, $f(x,y)$ を $(0,0)$ でテイラー展開すると

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} = 1 - (x^2+y^2) + \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 + \cdots$$

となる.

1.8 陰関数の微分法

2 変数関数 $f(x,y)$ において, $f(x,y) = 0$ を満たす点 (x,y) の集合は xy-平面における曲線を与えると考えられる[4].

[4]実際には曲線でない場合もあるが, 取り敢えずそれは考えないことにする.

定義 1.15. 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, $f(x,y)=0$ で与えられる曲線が関数 $y=\varphi(x)$ で与えられるとき, この関数を $f(x,y)=0$ の**陰関数**という.

最初に陰関数が存在するための条件を与える.

定理 1.9. $D\subset\mathbb{R}^2$ を領域とし, $f(x,y)$ を D で C^1 級関数であり, $f(a,b)=0$ とする. このとき, $f_y(a,b)\neq 0$ ならば $x=a$ を含むある区間で微分可能な関数 $y=\varphi(x)$ で

$$f(x,\varphi(x))=0,\ \ b=\varphi(a)$$

を満たすものがただ *1* つ存在する. 更に

$$\frac{d\varphi}{dx}(x)=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}\quad (y=\varphi(x))$$

が成り立つ.

この定理の証明を理解することは困難である. しかし, 直観的には次のようなことを行っている. まず, $f(x,y)$ に対してテイラーの定理を使うと

$$f(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+\varepsilon(x-a,y-a),$$
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{\varepsilon(x-a,y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0.$$

(a,b) およびその近くの (x,y) で $f(a,b)=f(x,y)=0$ とすると

$$0=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+\varepsilon(x-a,y-a).$$

ここで剰余項 $\varepsilon(x-a,y-a)$ を無視すると $f_y(a,b)\neq 0$ より

$$y=-\frac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}(x-a)+b$$

この式の右辺が剰余項がない場合の陰関数となる. 実際には剰余項まで考慮して陰関数の存在を示す必要があり, これが理解しにくい点である.

注意 1.2. 陰関数定理において $f_y(a,b)\neq 0$ の代わりに $f_x(a,b)\neq 0$ を仮定すると, 陰関数は $x=\psi(y)$ の形になる.

例 1.13. $f(x,y)=x^3y-x^2y^2-1$ とする. このとき, 陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在すると仮定して,　その導関数は

$$\frac{d\varphi}{dx}(x)=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=\frac{3x^2y-2xy}{x^3-2x^2y}\quad (x^3-2x^2y\neq 0)$$

となる.

この例からもわかるように, 一般に陰関数自身を具体的に表すことは難しいが, その導関数はある程度具体的に表すことができる. これは陰関数の不思議な点の 1 つである.

$f(x,y)$ の微分可能性に応じて陰関数の微分可能性も変わる. $f(x,y)$ が C^2 級であるとする. 定理 1.9 のもとで陰関数 $y=\varphi(x)$ の第 2 次導関数は

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{d}{dx}\left(\frac{f_x}{f_y}\right)\\ &= -\frac{f_{xx}+f_{xy}\dfrac{dy}{dx}}{f_y}+\frac{f_x\left(f_{yx}+f_{yy}\dfrac{dy}{dx}\right)}{(f_y)^2}\\ &= -\frac{f_{xx}(f_y)^2-2f_{xy}f_xf_y+f_{yy}f_x}{(f_y)^3}\end{aligned}$$

となる. ここで $f_x=f_x(x,y)=f_x(x,\varphi(x))$, $f_y=f_y(x,y)=f_y(x,\varphi(x))$ である. 特に, $f_x(x,y)=0$ となる x においては $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{f_{xx}}{f_y}$ である. これらのことより次の事柄が証明できる.

定理 1.10. $f(x,y)$ を点 (a,b) の近くで C^2 級とする. また $f(a,b)=0$, $f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)\neq 0$ と仮定する. このとき以下が成り立つ.

(1) (a,b) において $f_{xx}f_y<0$ ならば, (a,b) の近くの $f(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ は $x=a$ で極小値を取る.

(2) (a,b) において $f_{xx}f_y>0$ ならば, (a,b) の近くの $f(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ は $x=a$ で極大値を取る.

上の定理では $f_{xx}f_y=0$ の場合は何も言っていないので, 別の考察が必要である この定理を使って陰関数の極値を求めてみる.

例 1.14. $f(x,y)=x^2+xy+2y^2-1=0$ で定まる陰関数 $y=y(x)$ の極値を求める. まず, $f_x=2x+y$, $f_y=x+4y$ なので, 陰関数 $y=y(x)$ の導関数は

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y}{x+4y}\quad (\text{但し}, x+4y\neq 0).$$

$\dfrac{dy}{dx}=0$ を満たす (x,y) を求める. このとき, $2x+y=0$ となるので, これを $f(x,y)=0$ に代入すると

$$f(x,-2x)=x^2-2x^2+8x^2-1=7x^2-1=0$$

よって $(x,y)=(1/\sqrt{7},-2/\sqrt{7}),\ (-1/\sqrt{7},2/\sqrt{7})$ であり, いずれも $x+4y\neq 0$ を満たす.

$f_{xx} = 2$ なので, 上で求めた (x, y) に対して

$$f_{xx}f_y = 2 \cdot (-\sqrt{7}) < 0 \quad \left((x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{-2}{\sqrt{7}}\right)\right),$$
$$f_{xx}f_y = 2 \cdot \sqrt{7} > 0 \quad \left((x,y) = \left(\frac{-1}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}}\right)\right),$$

であることから, $y(1/\sqrt{7}) = -2/\sqrt{7}$ は極小値, $y(-1/\sqrt{7}) = 2/\sqrt{7}$ は極大値である.

1.9 2 変数関数の極大・極小

2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフを描いてみると山があったり, 谷があったり, くぼみがあったりする. この山, 谷, くぼみにあたるところが $f(x, y)$ の極値を与える点になる. まず, 2 変数関数の極値を定義する.

定義 1.16. $D \subset \mathbb{R}^2$ を領域, $f(x, y)$ を D で定義された関数とする.

(1) (a, b) の近くの任意の点 $(x, y) \neq (a, b)$ に対して

$$f(x, y) \leq f(a, b)$$

が成り立つとき, $f(x, y)$ は (a, b) で**極大値**を取るという.

(2) (a, b) の近くの任意の点 $(x, y) \neq (a, b)$ に対して

$$f(x, y) \geq f(a, b)$$

が成り立つとき, $f(x, y)$ は (a, b) で**極小値**を取るという.

極大値, 極小値をまとめて**極値**という.

定理 1.11. $D \subset \mathbb{R}^2$ を領域, $f(x, y)$ を D で定義された偏微分可能な関数とする. 点 $(a, b) \in D$ で $f(x, y)$ が極値を取るならば

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0.$$

この定理は $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ は $f(x, y)$ が (a, b) で極値をとるための必要条件であることを示しているが, $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ は $f(x, y)$ が (a, b) で極値をとるための十分条件ではないことが次の例でわかる.

例 1.15. $f(x, y) = xy$ とする. このとき $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ であるが $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で極大値も極小値も取らない. 実際,

$$f(x, y) > 0 \quad \text{if } xy > 0, \; f(x, y) < 0 \quad \text{if } xy < 0$$

だからである.

高校数学 II で勉強したことだが, 1 変数関数 $f(x)$ の極値を求める手順は以下のようだったことを思い出しておこう.

(1) $f'(a) = 0$ と満たす a をもとめる. これが $f(x)$ の極値を取る候補となる.

(2) (特に $x = a$ の前後の) $f'(x)$ の符号を調べて, 増減表を作る.

(3) 作った増減表を見て $x = a$ で極大 or 極小を取るかどうかを判断する.

この手順で重要なものは増減表であろう. 増減表のおかけで $f(x)$ の増減の様子が捉えやすくなっている.

上の手順を 2 変数関数 $f(x, y)$ の場合に当てはめてみたい. まず $f_x(a, b) = 0$, $f_y(a, b) = 0$ となる点 (a, b) を求める. 定理 1.11 より, この点が $f(x, y)$ の極値を取る候補となる. 次に $f(x, y)$ の増減表を描きたいが, もし描けたとしてもそれは立体的なものとなってしまい, 非常に見づらく利用できるものにはならないであろう[5]. そこで増減表の代わりに第 2 次偏導関数 f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} の利用を考える. 実際, $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ となる点 (a, b) の周りで $f(x, y)$ をテイラー展開すると

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{1}{2}\{f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2\} + \varepsilon(h, k),$$
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h, k)}{h^2 + k^2} = 0.$$

ここで,

$$f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2 \neq 0 \quad ((h, k) \to (0, 0))$$

と仮定する. $(h, k) \to (0, 0)$ のとき $\varepsilon(h, k)$ は $f_{xx}(a, b)h^2+2f_{xy}(a, b)hk+f_{yy}(a, b)k^2$ に比べて非常に小さいので, (a, b) の近くでの $f(x, y)$ の様子は $f_{xx}(a, b)h^2+2f_{xy}(a, b)hk+f_{yy}(a, b)k^2$ を調べればよいことがわかる. この点に関しては次の補題を使う.

補題 1.1. $F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ に対して, $D = B^2 - AC$ とする.

(1) $D < 0$ のとき

(i) $A > 0$ ならば, 全ての $(x, y)(\neq (0, 0))$ に対して $F(x, y) > 0$,

(ii) $A < 0$ ならば, 全ての $(x, y)(\neq (0, 0))$ に対して $F(x, y) < 0$, .

(2) $D > 0$ のとき, $F(x, y)$ は $(0, 0)$ の近くでは正の値も負の値も取りうる.

この補題を使うと 2 変数関数の極値の判定について, 次の定理が成り立つ.

[5] 3 変数以上の関数の場合は到底不可能である.

定理 1.12. $D \subset \mathbb{R}^2$ を領域とし, $f(x,y)$ は D で C^2 級とする. 点 $(a,b) \in D$ が $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ を満たすとする.

$$H(x,y) = (f_{xy}(x,y))^2 - f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)$$

とおくと, 以下が成り立つ.

(1) $H(a,b) < 0$ であるとき,

 (i) $f_{xx}(a,b) > 0$ ならば, $f(x,y)$ は (a,b) で極小となる.

 (ii) $f_{xx}(a,b) < 0$ ならば, $f(x,y)$ は (a,b) で極大となる.

(2) $H(a,b) > 0$ ならば $f(x,y)$ は (a,b) で極大も極小にもならない.

$(a,b) = (0,0)$, $f(0,0) = 0$ を仮定し, $(0,0)$ の近くでの定理 1.12 の状況を下図に示す.

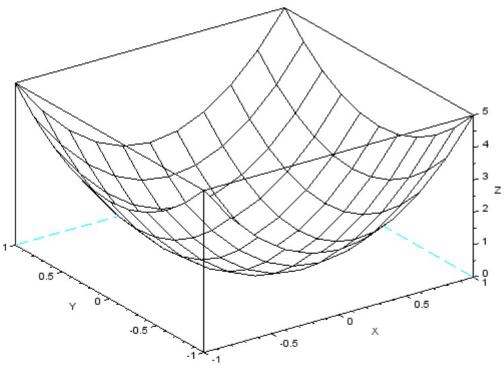


図 1: $H(a,b) < 0$, $f_{xx}(a,b) > 0$ の場合

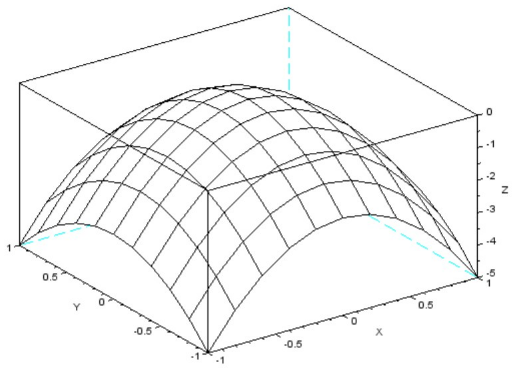


図 2: $H(a,b) < 0$, $f_{xx}(a,b) < 0$ の場合

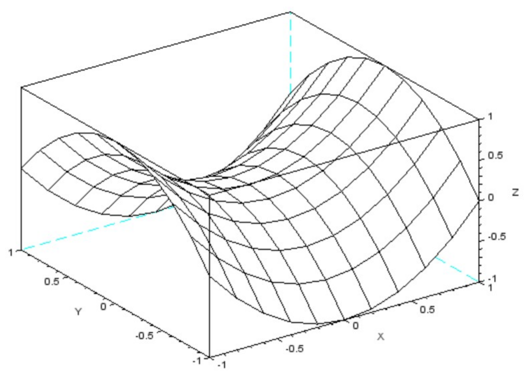


図 3: $H(a,b) > 0$ の場合

注意 1.3. (1) 定理 1.11 において, $H(a,b)=0$ や $f_{xx}(0,0)=0$ の場合等は何も主張していないので別に考察する必要がある.

(2) 定理 1.11 のように極値の判定に第 2 次 (偏) 導関数を使うという考えは 1 変数関数の場合にも使える. それは, 特に, 陰関数の極値問題や後で説明する条件付き極値問題を考察する場合に有効である. 通常の 1 変数関数の場合は増減表が書けるので, 第 2 次導関数を極値の判定に使わない.

例 1.16. $f(x,y)=x^4-xy+y^4$ の極値を求める.

$$f_x=4x^3-y,\ f_y=-x+4y^3$$

なので, $f_x=f_y=0$ となる (x,y) は

$$\begin{aligned} 0 &= -x+256x^9=x(256x^8-1)=x(4^2x^4+1)(4^2x^4-1) \\ &= x(4^2x^4+1)(4x^2+1)(2x+1)(2x-1) \end{aligned}$$

より $(x,y)=(0,0),\ (1/2,1/2),\ (-1/2,-1/2)$.

$f_{xx}=12x^2$, $f_{xy}=f_{yx}=-1$, $f_{yy}=12y^2$ なので

$$H(x,y)=1-144x^2y^2$$

とおくと, $H(0,0)=1$, $H(1/2,1/2)=H(-1/2,-1/2)=-7$ である. 定理 1.11 (2) より $(0,0)$ では極値を取らない. $f_{xx}(1/2,1/2)=f_{xx}(-1/2,-1/2)=3$ だから, 定理 1.11 (1) (i) より $(x,y)=(1/2,1/2),\ (-1/2,-1/2)$ で極小値 $-1/8$ を取る.

条件付き極値問題

変数 x, y が条件 $\varphi(x,y)=0$ によって制限を受けているときの $f(x,y)$ の極値を求める問題を**条件付き極値問題**といい, 最適化問題等の応用によく現れる.

制限条件 $\varphi(x,y)=0$ が $y=g(x)$ の形に変形できるならば, これを代入することによって $f(x,g(x))$ の極値を考えればよい. しかし, $y=g(x)$ の形に変形できない場合はこのようにはいかない. その場合は**ラグランジュの未定乗数法**を使う.

定理 1.13. *$\varphi(x,y)$, $f(x,y)$ はともに C^1 級とする. このとき, $\varphi(x,y)=0$ の条件の下で $f(x,y)$ が点 (a,b) で極値を取るならば, (a,b) において*

$$f_x(a,b)+\lambda\varphi_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)+\lambda\varphi_y(a,b)=0,\ \varphi(a,b)=0$$

*を満たす, 但し, $\varphi_x(a,b)\neq 0$ または $\varphi(a,b)\neq 0$ とし, λ を***ラグランジュの未定乗数***という.*

この定理の背景を簡単に説明する. まず, 制限条件 $\varphi(x,y)=0$ を考えない場合, $f(x,y)$ が点 (a,b) で極値を取るならば, $f(x,y)$ の (a,b) における全微分が 0, つまり

$$df(a,b)=f_x(a,b)dx+f_y(a,b)dy=0 \tag{1.4}$$

が成り立つ. 制限条件 $\varphi(x,y)=0$ を考えなければ, 微小量 dx, dy は自由に変化させてよい. しかし制限条件がある場合, dx, dy は

$$\varphi(a+dx,b+dy)=\varphi(a,b)(=0)$$

を満たすようにしか変化させることができない. この条件から dx, dy の動かし方は

$$\varphi_x(a,b)dx+\varphi_y(a,b)dy=0 \tag{1.5}$$

に制限されることになる. (1.4), (1.5) より dy を消去すると

$$(f_x(a,b)-\lambda\varphi_x(a,b))dx=0,\ \lambda=\frac{f_y(a,b)}{\varphi_y(a,b)}.$$

これらの式から定理 1.13 の結論が導ける.

注意 1.4. (1) λ を**未定乗数**という理由は, この λ を具体的に決める必要はなく, 決まらない定数のままでも極値が求められることによる.

(2) 制限条件のない極値問題と同様に, 定理 1.11 で定まる点 (a,b) は極値を取る候補の点に過ぎない. 実際に極値を取るかどうかは別途考察が必要である.

条件付き極値問題は定理 1.13 に加えて, 定理 1.9, 1.10 等を用いる. これらの定理を使った例を挙げる.

例 1.17. $\varphi(x,y)=x^2-\dfrac{y^2}{4}-1=0$ のもとで $f(x,y)=x^3+y$ の極値を求める. 定理 1.13 より

$$f_x(a,b)+\lambda\varphi_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)+\lambda\varphi_y(a,b)=0,\ \varphi(a,b)=0$$

なので

$$3a^2+2\lambda a=0,\ 1-\frac{\lambda b}{2}=0,\ a^2-\frac{b^2}{4}-1=0.$$

最初の式より $a=0$, $a=-2\lambda/3$. $a=0$ ならば, 3 番目の式を満たす b が存在しないので, $a\neq 0$, 即ち $a=-2\lambda/3(\neq 0)$ である. これと $b=2/\lambda$ を 3 番目の式に代入すると

$$\frac{4\lambda^2}{9}-\frac{1}{\lambda^2}-1=0 \Longleftrightarrow (4\lambda^2+3)(\lambda^3-3)=0.$$

よって $\lambda=\pm\sqrt{3}$ が得られ, $(a,b)=(-2/\sqrt{3},2/\sqrt{3})$, $(2/\sqrt{3},-2/\sqrt{3})$ となる.

これらの点において

$$\varphi_x\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{5}{\sqrt{3}},\ \varphi_x\left(\frac{-2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{-5}{\sqrt{3}}$$

となるので, 定理 1.9 よりそれぞれの点の近くで陰関数が存在する. これらの陰関数を $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ とし, $f_1(x)=f(x,\varphi_1(x))$, $f_2(x)=f(x,\varphi_2(x))$ とする.

$x = 2/\sqrt{3}$ の近くでは恒等的に $\varphi(x, \varphi_1(x)) = 0$ なので,

$$\frac{d}{dx}\varphi(x, \varphi_1(x)) = 2x - \frac{1}{2}\varphi_1(x)\varphi_1'(x) = 0,$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x, \varphi_1(x)) = 2 - \frac{1}{2}(\varphi_1'(x))^2 - \frac{1}{2}\varphi_1(x)\varphi_1''(x) = 0.$$

よって

$$\varphi_1'\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -4,\ \varphi_1''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 6\sqrt{3}.$$

$f_1(x)$ に関しては

$$f_1'(x) = 3x^2 + \varphi_1'(x),\ f_1''(x) = 6x + \varphi_1''(x)$$

であるから

$$f_1'\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 0,\ f_1''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 10\sqrt{3} > 0.$$

故に 定理 1.10 から $f_1(x)$ は $x = 2/\sqrt{3}$ で極小値をとる. 従って, $\varphi(x, y) = 0$ という条件のもとで $f(x, y)$ は点 $(2/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3})$ において極小値 $2\sqrt{3}/9$ を取る.

同様にして, $\varphi(x, y) = 0$ という条件のもとで $f(x, y)$ は点 $(-2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$ において極大値 $-2\sqrt{3}/9$ を取る.