

微分積分 1 自習用資料

この資料について

この資料は微分積分 1 の自習用の資料である。微分積分 1 の教科書は

- 明解 微分積分 (南 就将 他 著, 数学書房) (理学部数学科・物理学科)
- 微分積分講義 (南 和彦 著, 裳華房) (工学部, 医学部医学科)
- 微分積分学序論 (林 平馬 他 著, 学術図書) (上記以外の学部・学科)

のように指定されているが, この資料は主に「微分積分学序論」(林 平馬 他 著, 学術図書)の内容に沿った形で書かれている¹。但し, 章立てや定理の番号等は異なっていることに留意されたい。定理等に関しては直感的な説明を与えているものはあるが, 証明は与えていない。そのため, この資料は「微分積分講義」(南 和彦 著, 裳華房)の参考資料としては役立つかもしれないが, 「明解 微分積分」(南 就将 他 著, 数学書房)の参考資料としては内容的に不足していると思われる。この点については御容赦いただき, 他の書籍等を参考にしていただきたい。

微分積分 1 は高校数学 II, III と重複する内容もあるので, そういう点はこの資料ではあまり丁寧に書いていない。それに関しては高校時代に使っていた教科書・参考書等で復習してほしい。質問や不明な点等があれば, 自分のにクラスの担当教員に質問するか, 学修支援室を利用してほしい。

¹この資料の執筆者の担当クラスで使っている教科書が「微分積分学序論」であることによる。

1 極限と連続

1.1 関数

関数の極限や連続性に関することについて述べる. この小節の内容は高校数学 III で勉強したこととかなり重複しているので, 適宜省略して構わない.

\mathbb{N} を自然数全体の集合, \mathbb{R} を実数全体の集合とする. D が \mathbb{R} の部分集合であることを $D \subset \mathbb{R}$ と表す. また, この場合 D は開区間 (a, b) , 閉区間 $[a, b]$ や無限区間 $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ 等を想定しておけばよい. また, x が D に属する実数であることを $x \in D$ と表す.

定義 1.1. $D \subset \mathbb{R}$ とし, $f(x)$ を D で定義された関数とする. このとき, 任意の $x \in D$ に対して

$$f(x) \leq M \quad (\text{または } f(x) \geq m)$$

が成り立つ ($x \in D$ とは無関係な) 定数 M (または m) が取れるとき, f を上に有界 (または下に有界) という. 上に有界, かつ下に有界な関数を単に有界な関数という.

有界な関数とはその値域が有限な範囲 (例えば, 閉区間 $[0, 1]$) に収まるような関数を言う. 以下の例で直感的に理解できるだろう.

例 1.1. (1) $f(x) = x^2$ ($x \in [0, 1]$) とすると, $0 \leq f(x) \leq 1$ であるから, $f(x)$ は区間 $[0, 1]$ で有界な関数である.

(2) $f(x) = \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$) とすると, $-1 \leq f(x) \leq 1$ なので, $f(x)$ は実数全体で有界な関数である.

(3) $f(x) = \tan x$ ($-\pi/2 < x < \pi/2$) とすると, $f(x)$ は開区間 $(-\pi/2, \pi/2)$ で上に有界でなければ, 下に有界でもない関数である.

高校数学 II で関数の単調増加, 単調減少の定義を与えたが, ここではより詳しく定義する.

定義 1.2. $D \subset \mathbb{R}$ とし, $f = f(x)$ を D で定義された関数とする. D_1 を D の任意の部分集合とする.

(1) 任意の $x_1, x_2 \in D_1$ ($x_1 < x_2$) に対して $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$) ならば $f(x)$ は D_1 で単調増加 (単調減少) であるという.

(2) 任意の $x_1, x_2 \in D_1$ ($x_1 < x_2$) に対して $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) ならば $f(x)$ は D_1 で狭義単調増加 (狭義単調減少) であるという.

上の定義の違いを簡単に言うと, 等号付きの不等号 \leq, \geq の場合が単調増加, 単調減少であり, 等号のつかない不等号 $<, >$ の場合が狭義単調増加, 狭義単調減少である. 次の例で単調増加と狭義単調増加の違いがわかると思う.

例 1.2. (1) $y = x^3$ ($x \in \mathbb{R}$) は \mathbb{R} で狭義単調増加な関数である.

(2) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & (x \leq -1), \\ 0 & (-1 < x < 1), \\ x - 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

とする. このとき $f(x)$ は \mathbb{R} で単調増加であるが, 狭義単調増加ではない.

注意 1.1. 定義 1.2 から想像がつくかもしれないが, その定義域全体で関数が単調増加 (あるいは狭義単調増加等) でなくても, 定義域のある部分集合に制限すれば単調増加 (あるいは狭義単調増加等) になることはよくある. 実際, 例 1.2 (2) において $f(x)$ の定義域を閉区間 $[1, +\infty)$ に制限すれば $f(x)$ は狭義単調増加である.

逆関数について簡単に説明する. $D \subset \mathbb{R}$ とし, $f(x)$ を D で定義された関数とする. $f(x)$ は次の条件を満たすと仮定する:

(A1) 任意の $y \in f(D)$ に対して $y = f(x)$ となる $x \in D$ が**唯一つ存在する**.

但し, $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$ は $f(x)$ の値域である. この仮定の下で次のような対応を考えることができる.

(1.1) $f(D) \ni y \mapsto x \in D : y = f(x)$ を満たす.

この対応は $f(D)$ から D への関数となる. この関数を $f(x)$ の**逆関数**といい, $y = f^{-1}(x)$ で表す.

注意 1.2. (1) (A1) が成り立たない場合は逆関数が定義できない. 何故ならば, $y \in f(D)$ に対して $y = f(x)$ となる $x \in D$ が 2 個以上存在することが考えられるからである.

(2) 関数 $f(x)$ がその定義域 D において狭義単調増加, または狭義単調減少ならば仮定 (A1) が満たされる.

例 1.3. $f(x) = x^2$ とする. $f(x)$ の定義域を $D = [0, +\infty)$ とすると, 上の仮定 (A1) を満たすので, 逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在する. この場合, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ($x \in [0, +\infty) = f(D)$) である.

一方, $f(x)$ の定義域を \mathbb{R} とすると, 任意の $y \in f(D)$ に対して $y = f(x)$ となる $x \in \mathbb{R}$ は

$$y = x^2 \iff x = \pm\sqrt{y}$$

となるので $f(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) は仮定 (A1) を満たさない. よって $f(x)$ の逆関数は存在しない.

この例よりわかることは以下の事柄である.

(1) 関数 $f(x)$ に対して逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在するとき, $f^{-1}(x)$ の定義域は $f(x)$ の値域で, $f^{-1}(x)$ の値域は $f(x)$ の定義域である.

(2) 1つの関数に対して定義域の取り方に応じて逆関数が存在したり, しなかったりする.

次に合成関数について簡単に述べておく.

定義 1.3. $D, E \subset \mathbb{R}$ とし, $f(x)$ を D で定義された関数, $g(x)$ を E で定義された関数とする. $\{f(x) \mid x \in D\}$ ($f(x)$ の値域) が E に含まれるならば, 任意の $x \in D$ に対して $z = g(f(x))$ が定義できる. このとき, 関数 $g(f(x))$ ($x \in D$) を $f(x)$ と $g(x)$ の**合成関数**といい, $(g \circ f)(x)$ と表す.

2つの関数 $f(x), g(x)$ に対して合成関数 $(g \circ f)(x), (f \circ g)(x)$ が定義できるとする, 一般に $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ は成り立たないし, $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ の定義域が等しいとは限らない.

例 1.4. $f(x) = x^2 + 1$ ($x \in \mathbb{R}$), $g(x) = \sqrt{x}$ ($x \in [0, +\infty)$) とおく. このとき

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 1}, (f \circ g)(x) = x + 1.$$

よって $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$ であり, $g \circ f(x)$ の定義域は \mathbb{R} , $f \circ g(x)$ の定義域は $[0, +\infty)$ である.

偶関数, 奇関数について簡単に述べる. これらは定積分の計算をする際に計算が簡単になることがある.

定義 1.4. $D \subset \mathbb{R}$ は $x = 0$ で対称とし. $f(x)$ を D で定義された関数とする.

(1) 任意の $x \in D$ に対して $f(-x) = f(x)$ を満たすとき, $f(x)$ を**偶関数**という.

(2) 任意の $x \in D$ に対して $f(-x) = -f(x)$ を満たすとき, $f(x)$ を**奇関数**という.

注意 1.3. (1) 上の定義において「 $D \subset \mathbb{R}$ が $x = 0$ で対称」とは, $D = (-a, a)$ ($a > 0$) や $D = \mathbb{R}$ のような場合を主に考えている.

(2) $x^2, \cos x$ は \mathbb{R} で偶関数の典型例である. また, $x^3, \sin x$ は \mathbb{R} で奇関数の典型例である.

1.2 関数の極限值

この小節の内容は高校数学 III で勉強したこととかなり重複しているので適宜省略してよい.

高校数学 II, III で関数の極限や微分等を勉強したときに「限りなく近づく」という表現をよく見たと思う. 言いたいことは理解できると思われるが, (どの程度かは人によるかもしれないが) 曖昧な表現に思える. この「限りなく近づく」という表現を言い換えてみる. そうすることで「限りなく近づく」の意味が多少は理解できると思われる.

実数 x が実数 x_0 に限りなく近づくとは $x \neq x_0$ を満たしながら x と x_0 の差の絶対値 $|x - x_0|$ が限りなく 0 に近づく, 即ち

$$(1.2) \quad |x - x_0| \rightarrow 0$$

と考えるのが自然である. 絶対値 $|x - x_0|$ は x と x_0 を \mathbb{R} 上の 2 点と見たとき, x と x_0 の距離となる (Figure 1.2.1 を参照). すると x が x_0 に限りなく近づくとはこの 2 点の距離 $|x - x_0|$ が限りなく 0 に近づく, あるいは $|x - x_0|$ がいくらでも小さくなることと理解できる².

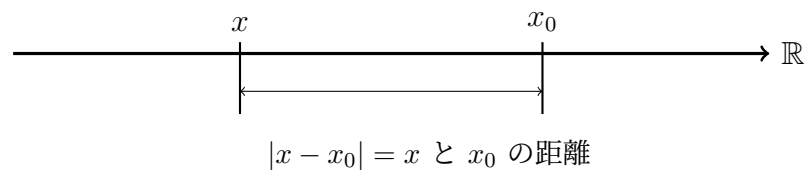


Figure 1.2.1

関数の極限を定義する. (1.2) を単に $x \rightarrow x_0$ と表す.

定義 1.5. $D \subset \mathbb{R}$ とし, $f(x)$ を D で定義された関数とする. x が D 内を動きながら x_0 に限りなく近づくとき, その近づき方によらず, $f(x)$ がある実数 α に限りなく近づくならば, この α を $x \rightarrow x_0$ としたときの $f(x)$ の**極限值**, あるいは $x \rightarrow x_0$ のとき $f(x)$ は α に**収束する**といい, .

$$(1.3) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha \text{ または } f(x) \rightarrow \alpha \text{ (} x \rightarrow x_0 \text{)}$$

と書く. このような α が無い場合は**極限值はない**, または**収束しない**という.

(1.3) は

$$|f(x) - \alpha| \rightarrow 0 \quad (|x - x_0| \rightarrow 0)$$

を意味することは言うまでもない. この定義において重要な点が 2 つある. 1 つ目は x_0 は $f(x)$ の定義域 D になくてもよいという点である. 次の例を参考にしてほしい.

例 1.5. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ とする. このとき $f(x)$ の定義域は 2 以外の実数全体である. $x \rightarrow 2$ とすると, $x \neq 2$ に注意して

$$f(x) = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = x + 2 \rightarrow 4$$

となり, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ を得る.

²距離を使ったこの考え方は多変数関数の極限等を扱うための基礎になる.

2つ目は極限值 α は $x \rightarrow x_0$ となるとき、その近づき方にはよらない実数であるという点である。これが成立しない場合は極限値は無いということになるが、それを次の例で見てみる。

例 1.6. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) とする。自然数 n に対して $x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ とおくと $x_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) であり、

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{(4n+1)\pi}{2} = 1.$$

一方、 $y_n = \frac{2}{(4n+3)\pi}$ とおくと $y_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) であり、

$$\lim_{y_n \rightarrow 0} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{(4n+3)\pi}{2} = -1.$$

従って $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ は存在しない。

注意 1.4. 関数の連続性を議論するためには定義 1.5 の内容をより詳しく見る必要がある。そのために右極限、左極限の定義を導入するのだが、この資料ではそこまで踏み込まない。

既に例 1.6 で用いたが、 $x (> 0)$ がいくらでも大きくなることを $x \rightarrow +\infty$ と表す。また、負の実数 x が $|x| \rightarrow +\infty$ を満たすとき、 $x \rightarrow -\infty$ と表す。 x が自然数や整数の場合でも同様である。

定義 1.6. $D \subset \mathbb{R}$ とし、 $f(x)$ を D で定義された関数とする。 x が D 内を動きながら $|x - x_0| \rightarrow 0$ となるとき、 $f(x)$ が (正の実数として) 限りなく大きくなるならば、 $x \rightarrow x_0$ としたとき $f(x)$ は**正の無限大に発散する**といい、

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ または } f(x) \rightarrow +\infty \text{ (} x \rightarrow x_0 \text{)}$$

と書く。 $|x - x_0| \rightarrow 0$ のとき、 $f(x) < 0$ かつ $|f(x)| \rightarrow +\infty$ ならば、 $x \rightarrow x_0$ としたとき $f(x)$ は**負の無限大に発散する**といい、

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \text{ または } f(x) \rightarrow -\infty \text{ (} x \rightarrow x_0 \text{)}$$

と書く。

注意 1.5. 定義 1.5, 1.6 において、 x_0 を $+\infty$, $-\infty$ に置き換えて同様に $f(x)$ の収束・発散が定義できる。

$x \rightarrow \pm\infty$ の極限を計算するときには

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

が重要である³.

関数の極限に関して、次の定理は基本的である.

定理 1.1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$ $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \beta$ とする. このとき、以下が成り立つ.

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x) + lg(x)) = k\alpha + l\beta$ (k, l は定数)

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \alpha\beta$

(3) $\beta \neq 0$ ならば $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$

(4) $x = x_0$ の近くで $f(x) \leq g(x)$ ならば $\alpha \leq \beta$.

(5) $x = x_0$ の近くで $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ で $\alpha = \beta$ ならば $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \alpha$.

上の定理の (5) は「はさみうちの原理」と呼ばれているものである. この定理の内容を組み合わせて使うことでいろいろな関数の極限が計算できる.

例 1.7. (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ を求める. 分子にある $\sqrt{x+1} - 1$ の「有理化」を行うと.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1) - 1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3}{5x^2 + x}$ を求める. 分数式の分母・分子を x^2 で割ると

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3}{5x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2}}{5 + \frac{1}{x}} = \frac{2}{5}$$

以下の極限は三角関数や指数関数, 対数関数の連続性・微分可能性を考察する上で重要である.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

1.3 連続関数

ここでは連続関数の定義を与え, その性質等について述べる. この小節も高校数学 III で勉強したと重複している箇所が多いので, 適宜省略してよい.

³この等式は自明のように見えるが, 証明は多少厄介である.

定義 1.7. $I \subset \mathbb{R}$ を区間, $f(x)$ を I で定義された関数とする. $a \in I$ とする.

(1) $f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは

(i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在する.

(ii) (i) の極限が $f(a)$ に等しい.

ときをいう.

(2) $f(x)$ が区間 I で連続であるとは I の各点で連続であるときをいう.

注意 1.6. (1) 定義 1.5 の前の段落で述べたように, 上の定義 (1) (i) において $x \rightarrow a$ は $x \in I, x \neq a$ を満たしながら $|x - a| \rightarrow 0$ となることを意味する.

(2) 上の定義 (1) については単に

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

で与えている書籍もある. この場合も定義 1.8 (1) (i), (ii) のように解釈する.

定数関数や x^n ($n \in \mathbb{N}$) は \mathbb{R} で連続である. また, x^{-n} ($n \in \mathbb{N}$) は $x \neq 0$ で連続である. 定理 1.1 より連続関数に対する以下の性質が示せる.

定理 1.2. 関数 $f(x), g(x)$ が $x = x_0$ で連続ならば,

$$kf(x) + lg(x), f(x)g(x) \quad (k, l \text{ は定数})$$

は $x = x_0$ で連続である. $g(x_0) \neq 0$ を仮定すれば $\frac{f(x)}{g(x)}$ も $x = x_0$ で連続である.

この定理を使うと多項式や有理関数の連続性を示すことができる. 有理関数とは $P(x), Q(x)$ ($Q(x) \neq 0$) を多項式とするとき $\frac{P(x)}{Q(x)}$ の形で与えられる式である.

合成関数, 逆関数の連続性は以下のように述べられる.

定理 1.3. $D, E \subset \mathbb{R}$ とし, $f(x)$ は D で定義された連続関数, $g(x)$ は E で定義された連続関数とする. $f(D) \subset E$ ならば, 合成関数 $(g \circ f)(x)$ が定義できて, D で連続である.

定理 1.4. $f(x)$ を区間 $[a, b]$ で定義された狭義単調増加 (狭義単調減少) な関数とし, $\alpha = f(a), \beta = f(b)$ とする. このとき, 区間 $[\alpha, \beta]$ (区間 $[\beta, \alpha]$) で定義される逆関数 $f^{-1}(x)$ は連続で狭義単調増加 (連続で狭義単調減少) である.

連続関数の性質としてよく知られている定理を 2 つ紹介する. .

定理 1.5. $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続で, $f(a) \neq f(b)$ とする. このとき, $f(a)$ と $f(b)$ 間の任意の実数 k に対して $k = f(\xi)$ となる $\xi \in (a, b)$ が存在する.

この定理は**中間値の定理**と呼ばれる. この定理は関数 $f(x)$ は連続であれば, $f(a)$ と $f(b)$ の間の全ての値を取ることを主張している. $y = f(x)$ のグラフを描いてみれば, この定理の主張は明らかに成り立つことがわかるが, 実際の証明は簡単ではない.

注意 1.7. (1) 「 $f(a)$ と $f(b)$ の間の実数 k 」とは $f(a) < k < f(b)$ または $f(b) < k < f(a)$ を満たすことを意味する. $k = f(a)$ ($k = f(b)$) の場合は $\xi = a$ ($\xi = b$) とすればよいので, 定理 1.5 の ($\xi \in (a, b)$ 以外の) 主張は明らかに成り立つ. このため $k = f(a)$, $k = f(b)$ の場合を除外している.

(2) 定理 1.5 において $f(x)$ の連続性は除くことができない. $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続でないとする Figure 1.3.1 のような状況が考えられる.

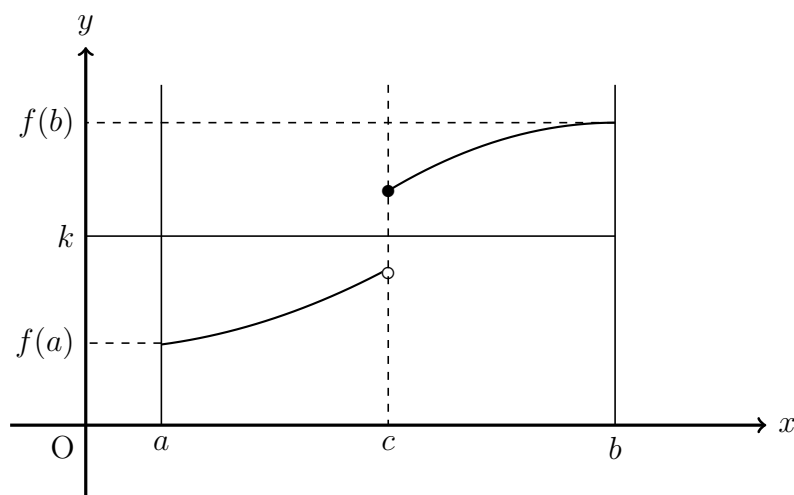


Figure 1.3.1

このとき, $k = f(\xi)$ となる $\xi \in (a, b)$ が無いような $k \in (f(a), f(b))$ が存在するので, f が連続でない場合は定理 1.5 の主張は成り立たない.

(3) 定理 1.5 は $k = f(\xi)$ となる $\xi \in (a, b)$ が存在することしか主張していない. $k = f(\xi)$ を満たす ξ の開区間 (a, b) における個数や位置に関しては何も言っていない.

中間値の定理は方程式の解の存在を証明するためにしばしば応用される.

例 1.8. $f(x) = 3^x + x - 5$ とおく. 方程式 $f(x) = 0$ は開区間 $(1, 2)$ に解を持つ. $f(x)$ は閉区間 $[1, 2]$ で連続である. 更に

$$f(1) = 3 + 1 - 5 = -1 < 0, \quad f(2) = 9 + 2 - 5 = 6 > 0$$

である. よって中間値の定理より $f(x) = 0$ の解は区間 $(1, 2)$ に解をもつ.

関数の最大・最小について述べる.

定義 1.8. $I \subset \mathbb{R}$ を区間, $f(x)$ を I で定義された関数とする. 次を満たす実数 $c \in I$ があるとする: 任意の $x \in I$ ($x \neq c$) に対して

$$f(x) \leq f(c) \quad (f(x) \geq f(c))$$

が成り立つ. このとき $f(x)$ は $x = c$ で**最大 (最小)** であるといい, $f(c)$ を $f(x)$ の区間 I における**最大値 (最小値)** という.

次の定理が成り立つ.

定理 1.6. 有界閉区間 $[a, b]$ で連続な関数は $[a, b]$ において最大値, および最小値を取る.

この定理は関数が「有界」な「閉区間」で「連続」であることが重要である. この3つの条件のどれか1つでも欠けていれば, 定理の主張が成り立たない例が容易に作れる.

1.4 逆三角関数

連続関数は多項式や有理関数以外にも三角関数, 指数関数, 対数関数等たくさんある. この節では新たに逆三角関数を定義し, その基本的な性質等について説明する.

$\sin x$ は \mathbb{R} で考えると連続ではあるが単調増加関数ではない. しかし, 定義域を閉区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ に制限すると $\sin x$ は連続で狭義単調増加関数である. 従って, 定理 1.4 より $\sin x$ の逆関数が存在する. この逆関数を**逆正弦関数**といい, $\text{Sin}^{-1}x$ と書く⁴ このとき

$$y = \text{Sin}^{-1}x \iff x = \sin y \quad \left(y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

である. 定理 1.4 より $\text{Sin}^{-1}x$ は閉区間 $[-1, 1]$ で連続かつ狭義単調増加であり, その値域は $[-\pi/2, \pi/2]$ である.

同様に, $\cos x, \tan x$ の逆関数も定義できる. $\cos x$ は閉区間 $[0, \pi]$ に制限すると連続で狭義単調増加な関数である. だから, 定理 1.4 より逆関数 $\text{Cos}^{-1}x$ が存在する. これの定義域は $[-1, 1]$ でこの区間で連続かつ狭義単調増加である. また, 値域は $[0, \pi]$ である. $\tan x$ は開区間 $(-\pi/2, \pi/2)$ に制限すると連続で狭義単調増加な関数なので, 定理 1.4 より逆関数 $\text{Tan}^{-1}x$ が存在する. これの定義域は \mathbb{R} でこの領域で連続かつ狭義単調増加である. また, 値域は $(-\pi/2, \pi/2)$ である. $\text{Cos}^{-1}, \text{Tan}^{-1}x$ をそれぞれ**逆余弦関数**, **逆正接関数**とい⁵. こ

⁴書籍によっては $\sin^{-1}x$ と書いている. この表記は $\sin^{-1}x = 1/\sin x$ と誤解しやすいので, この資料では使わない (他にも理由があるが, それは省略).

⁵これらの関数も $\cos^{-1}x, \tan^{-1}x$ と書いている書籍もある. $\text{Sin}^{-1}x$ と同様の理由でこの資料ではこのような表記を使わない

れらは

$$y = \text{Cos}^{-1}x \iff x = \cos y \quad (y \in [0, \pi])$$
$$y = \text{Tan}^{-1}x \iff x = \tan y \quad \left(y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

となる.

逆三角関数の代表的な値やグラフ等は教科書を参照されたい.

逆三角関数の応用例を 1 つ挙げる.

例 1.9. $\text{Tan}^{-1}\frac{1}{2} + \text{Tan}^{-1}\frac{1}{3}$ の値を求めてみる. $\alpha = \text{Tan}^{-1}\frac{1}{2}$, $\beta = \text{Tan}^{-1}\frac{1}{3}$ とおくと $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$ であり

$$\tan \alpha = \frac{1}{2}, \quad \tan \beta = \frac{1}{3}.$$

すると

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1$$

この等式と $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$ より $\alpha + \beta \in (0, \pi/2)$ を示すことができ, 結局 $\alpha + \beta = \pi/4$ となる. 従って

$$\text{Tan}^{-1}\frac{1}{2} + \text{Tan}^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

2 微分法

この節の内容の多くは高校数学 II, III で勉強しているはずなので適当に省略してよい. 初めて見るのは逆三角関数の微分と Leibniz の公式くらいであろう.

2.1 微分係数と関数

定義 2.1. $I \subset \mathbb{R}$ を区間, $f(x)$ を I で定義された関数とする.

(1) $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとは次の極限が存在するときをいう:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

この極限が存在するとき, それを $f(x)$ の $x = a$ における微分係数といい, $f'(a)$ で表す.

(2) $f(x)$ が区間 I で微分可能であるとは I の各点で微分可能であるときをいう.

$f'(a)$ は点 $(a, f(a))$ における関数 $f(x)$ の接線の傾きであることは周知のとおりである.

関数の微分可能性と連続性の関係について簡単に述べる.

定理 2.1. $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば, $x = a$ で連続である.

この定理の逆は一般には成り立たないことが簡単な例で分かる.

例 2.1. $f(x) = |x|$ ($x \in \mathbb{R}$) とする. このとき $f(x)$ は \mathbb{R} で連続であるが, $x = 0$ で微分可能でない.

$f(x)$ が区間 I で微分可能とすると, 各 $x \in I$ に対して微分係数 $f'(x)$ が定義できる. このとき, 対応 $I \ni x \mapsto f'(x)$ は I 上の関数となる. これを $f(x)$ の**導関数**といい,

$$f'(x), \frac{df}{dx}(x)$$

等と書く. 導関数を求めることを**微分する**という.

2.2 導関数の計算

導関数は次の定理の内容を使って求めるのが基本である.

定理 2.2. $f(x)$ $g(x)$ が微分可能ならば, 以下が成り立つ.

$$(1) \{kf(x) + lg(x)\}' = kf'(x) + lg'(x) \quad (k, l \text{ は定数})$$

$$(2) \{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(3) g(x) \neq 0 \text{ ならば } \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$(4) g(x) \neq 0 \text{ ならば } \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

実は, この定理において (2), (4) より (3) が導ける. 商の微分公式 (3) は有理関数のような分数の形をした関数の微分を計算するとき用いられるが, 積の微分公式 (2) を使っても計算できる.

例 2.2. $f(x) = \frac{6x+5}{3x^2+2}$ とすると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \{(6x+5)(3x^2+2)^{-1}\}' = 6(3x^2+2)^{-1} - (6x+5)(3x^2+2)^{-2}6x \\ &= \frac{6}{3x^2+2} - \frac{6x(6x+5)}{(3x^2+2)^2} = \frac{6(3x^2+2) - 6x(6x+5)}{(3x^2+2)^2} \\ &= \frac{-6(3x^2+5x-2)}{(3x^2+2)^2}. \end{aligned}$$

合成関数の微分法は次のとおりである.

定理 2.3. $I, J \subset \mathbb{R}$ を区間, $f(x), g(x)$ をそれぞれ I, J で微分可能な関数とする. $f(I) \subset J$ ならば, 合成関数 $g(f(x))$ は I で微分可能で

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x).$$

合成関数の微分も慣れないうちは間違えやすい. 慣れないうちは次の例のように計算すると間違いにくいかもしれない.

例 2.3. $f(x) = x^2, g(x) = \sin x$ とする. このとき合成関数 $(g \circ f)(x) (= g(f(x))) = \sin x^2$ の導関数は定理 2.3 を使って

$$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = g'(f(x))f'(x) = \cos f(x) \cdot f'(x) = 2x \cos x^2.$$

定理 2.3 より逆関数の微分公式を導くことができる.

定理 2.4. $I \subset \mathbb{R}$ を区間, $f(x)$ をそれぞれ I で微分可能で狭義単調増加な関数で $f'(x) \neq 0$ とする. このとき, 逆関数 $f^{-1}(x)$ は $f(I)$ で微分可能で

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

注意 2.1. 合成関数の微分公式や逆関数の微分公式の表示はいくつかある. 例えば, 合成関数の微分公式は $y = g(u), u = f(x)$ とすると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

であり, 逆関数の微分公式の場合は $y = f(x)$ とすると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

である. 自分にとって理解しやすい形で覚えればよい.

逆関数の微分公式を使うと逆三角関数の導関数を求めることができる.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\text{Sin}^{-1}x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \frac{d}{dx}\text{Cos}^{-1}x &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1), \\ \frac{d}{dx}\text{Tan}^{-1}x &= \frac{1}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

$\frac{d}{dx} \text{Sin}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を導いてみる.

$$y = \text{Sin}^{-1}x \quad (x \in (-1, 1) \iff x = \sin y \quad (y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)))$$

なので, 逆関数の微分公式より

$$\frac{d}{dx} \text{Sin}^{-1}x = \frac{1}{\cos(\text{Sin}^{-1}x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\text{Sin}^{-1}x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2.3 媒介変数で与えられる関数の微分法

定理 2.5. 媒介変数表示 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ において, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ がともに微分可能で, $\varphi'(t) \neq 0$ とする. このとき y は x の関数として微分可能であり

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

この定理を使うと媒介変数表示されている関数の極値やグラフの概形を知ることができる.

例 2.4. $x = t^2 - 2t$, $y = -t^2 + 1$ ($t \in \mathbb{R}$) で与えられる曲線の概形を描く.

$$\frac{dx}{dt} = 2t - 2 \quad \frac{dy}{dt} = -2t$$

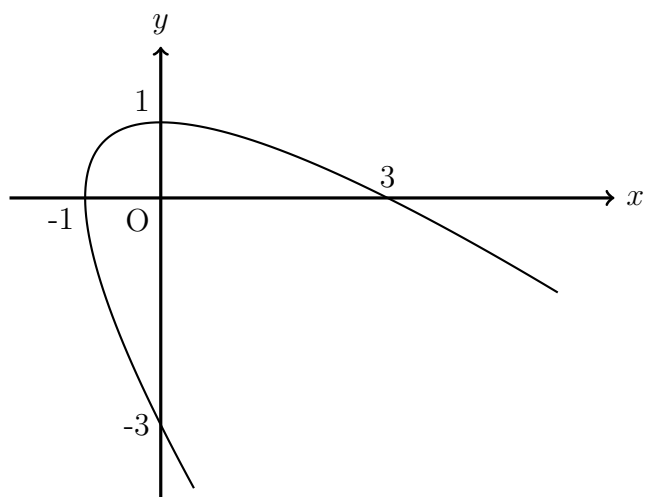
なので

$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ となる } t \text{ は } t = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 0 \text{ となる } t \text{ は } t = 0$$

このとき増減表は次のようになる.

t		0		1	
$\frac{dx}{dt}$	-	-	-	0	+
x	\searrow	0	\searrow	-1	\nearrow
$\frac{dy}{dt}$	+	0	-	-	-
y	\nearrow	1	\searrow	0	\searrow

この表を基にしてグラフの概形を描くと次図のようになる.



2.4 高次導関数

高次導関数は後で説明する、関数の凹凸を調べたり、近似を考える際に重要になる。

$I \subset \mathbb{R}$ を区間 $f(x)$ を I で微分可能とする。このとき、 $f'(x)$ が I で微分可能ならば $f'(x)$ の導関数 $(f')'(x)$ が定義できる。これは f から見ると 2 回微分していることになる。これを踏まえて次のような定義をする。

定義 2.2. $I \subset \mathbb{R}$ を区間 $f(x)$ を I で微分可能とする。 $f'(x)$ が I で微分可能ならば、 f は I で **2 回微分可能** という。 f' の導関数 $(f')'(x)$ を f の **第 2 次導関数** といい、

$$f''(x), \frac{d^2 f}{dx^2}(x)$$

などを書く。帰納的に $f(x)$ が I で $(n-1)$ 回微分可能なとき、第 $(n-1)$ 次導関数 $f^{(n-1)}(x)$ が I で微分可能ならば、 $f(x)$ は I で **n 回微分可能** であるという。第 $(n-1)$ 導関数の導関数 $(f^{(n-1)})'(x)$ を $f(x)$ の **第 n 次導関数** といい、

$$f^{(n)}(x), \frac{d^n f}{dx^n}(x)$$

などを書く。

$(f'(x))'$ は f から見ると f を 2 回微分していることになる。同様に、 $(f^{(n-1)})'(x)$ は f から見ると f を n 回微分していることになる。

定義 2.3. $I \subset \mathbb{R}$ を区間 $f(x)$ を I で定義された関数とする. $f(x)$ が I で n 回微分、かつ $f^{(n)}(x)$ が I で連続ならば、 f は n 回連続微分可能. または C^n 級という.

三角関数, 指数関数, 対数関数の第 n 次導関数はよく知られているので, この資料には書かない.

高次導関数の計算については積の微分公式の拡張と見做せる下の (2.3) が便利なおことがある. $u = f(x)$, $v = g(x)$ が微分可能な関数とする. 積の微分公式より

$$(2.1) \quad (uv)' = u'v + uv'$$

が言える. この両辺を微分していくと

$$(2.2) \quad \begin{aligned} (uv)'' &= u''v + 2u'v' + uv'', \\ (uv)^{(3)} &= u^{(3)}v + 3u''v' + 3u'v'' + uv^{(3)}, \end{aligned}$$

等となる. ここで $u^0 = u$, $u^1 = u'$ 等と見ると (2.1) は $a, b \in \mathbb{R}$ に対する

$$(a + b)^1 = a + b = a^1b^0 + a^0b^1 \quad (a^0 = b^0 = 1)$$

と類似の式に見える. 同様に (2.2) は

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2b^0 + 2a^1b^1 + a^0b^2$$

と似ている. このように考えると uv の第 n 次導関数は 2 項定理になぞらえて

$$(2.3) \quad (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n {}_n C_k u^{n-k} v^k$$

となることは想像できるであろう. 実際にこの式が成り立つことは数学的帰納法で証明できる. これを **Leibniz の公式** という. Leibniz 公式の応用例を挙げる.

例 2.5. $y = x^2 \sin x$ の第 n 次導関数は Leibniz の公式と $(x^2)^{(k)} = 0$ ($k = 3, 4, \dots$) に注意すると

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \sum_{k=0}^n {}_n C_k (x^2)^{n-k} (\sin x)^k = x^2 (\sin x)^{(n)} + 2nx (\sin x)^{(n-1)} + n(n-1) (\sin x)^{(n-2)} \\ &= x^2 \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) + 2nx \sin \left(x + \frac{(n-1)\pi}{2} \right) + n(n-1) \sin \left(x + \frac{(n-2)\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

3 微分法の応用

高校数学 III では微分法の応用として, 関数の極値やグラフの概形, 平均値の定理やそれらの応用について勉強した. この資料ではこれらの事項は適度に省略し, 初めて勉強するであろう L'Hospital の定理や Taylor の定理について説明する.

3.1 平均値の定理

まず、平均値の定理を復習しておく。

定理 3.1. $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続, かつ开区間 (a, b) で微分可能とする。このとき,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

を満たす $x \in (a, b)$ が存在する。

注意 3.1. 中間値の定理の場合と同様に $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ を満たす $c \in (a, b)$ の存在しか言っておらず, c の (a, b) における位置や個数に関しては別に考える必要がある。

平均値の定理はロルの定理から導けるが, 当面は平均値の定理の特別な場合がロルの定理であると思ってよい。平均値の定理の図形的な意味は高校数学 III で勉強したが, 次のように考えることもできる。 $b = a + h$ とおくと c は a と $a + h$ の間の数なので $c = a + \theta h$ ($0 < \theta < 1$) とおける。すると, 平均値の定理で書かれている式は

$$f(a + h) = f(a) + f'(a + \theta h)h \quad (0 < \theta < 1)$$

となる。この式は関数 $f(x)$ において $x = a$ の近くでは $f(a) + f'(a)h$ という 1 次式で近似できることを意味する。この見方は重要で, 後に出て来る Taylor の定理とも関連する。

3.2 関数の増減

この節は関数の単調増加, 単調減少や極値について述べられているが, これらは高校数学 II, III で勉強した内容なので省略してよい。次の定理のみを挙げておく。

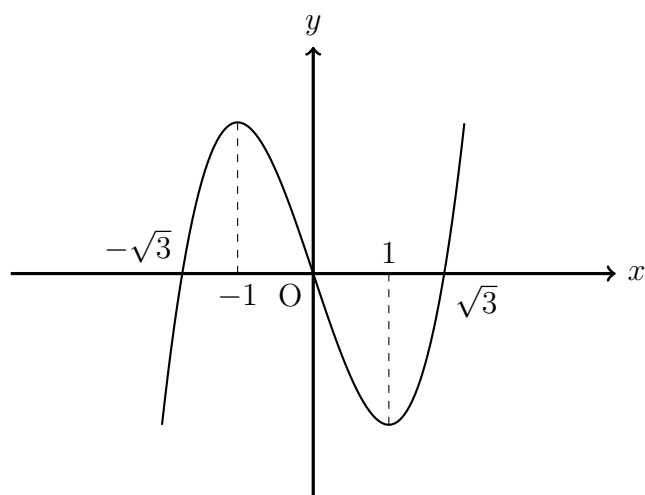
定理 3.2. $f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続, 开区間 (a, b) で微分可能な関数とする。

- (1) (a, b) で $f'(x) \equiv 0$ ならば, $[a, b]$ で $f(x)$ は定数である。
- (2) (a, b) で $f'(x) \geq 0$ ならば, $[a, b]$ で $f(x)$ は単調増加である。
- (3) (a, b) で $f'(x) \leq 0$ ならば, $[a, b]$ で $f(x)$ は単調減少である。

3.3 曲線の凹凸, 変曲点, グラフの概形

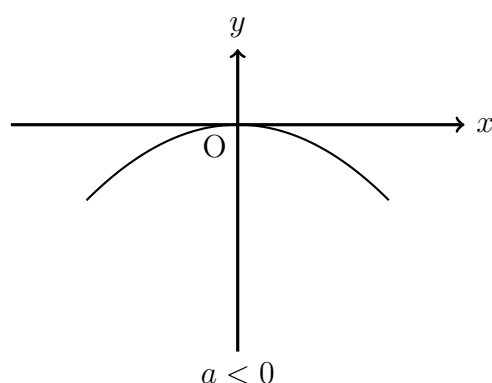
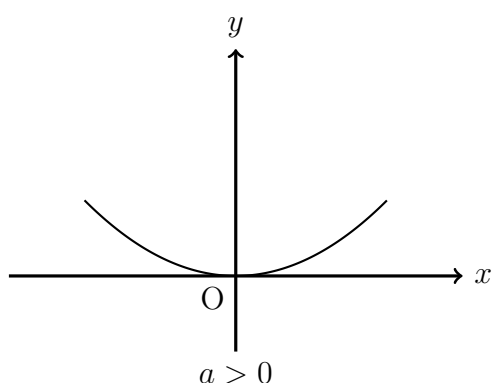
高校数学 II で 3 次関数のグラフを描いたと思う。その際, 教科書には 3 次関数のグラフがきれいな形で描かれており⁶, 次のようなグラフを見たことと思う。

⁶ グラフを手できれいに描くのは 2 次関数ですら意外に難しい。



これは $y = x^3 - 3x$ のグラフの概形である。このグラフを目を凝らしてよく見ると、原点の近くにおいて、左右でグラフの曲がり具合が微妙に違うことがわかるだろうか？⁷ 原点の近くで左側の部分は上に曲がっており、原点の近くで右側の部分は下に曲がっている。高校数学 II の段階ではこの曲がり具合の違いを表す量は勉強しないにも拘わらず、このようなグラフが高校数学 II の教科書に描かれていることに疑問を感じなかったであろうか？⁸ 言い換えると、この曲がり具合の違いを高校数学 II の範囲でどのように判断すればよいか疑問に思ったであろうか？ この曲がり具合の違いを高校数学 III で関数の第 2 次導関数の正負によって判断することを勉強した。

第 2 次導関数の正負によって具合の違いが判断できる理由を直感的に説明する。まず簡単のため、まず $f(x) = \frac{1}{2}ax^2$ (a は定数) の場合を考える。このとき、 $y = f(x)$ のグラフの形は a の正負によって以下ようになる。



ここで $f''(x) = a$ であることを考慮すると、関数の (この場合は、特に原点の近くでの)

⁷もしわからなくても気にする必要はない。

⁸これはかなり難しい事柄かもしれないので疑問に思わない方が当然かもしれない。

グラフの(大まかな)曲がり具合は $f''(x)$ の正負で決まることが想像できると思う⁹。直感的ではあるが、このような理由によってグラフの曲がり具合(実際には凹凸)を調べるために関数の第2次導関数の符号を調べるのである。

凸関数や凹関数の定義が一般の(微分可能とは限らない)関数の場合に与えられているが、省略しても構わない。何故ならば、この科目で勉強する範囲に限れば、滑らかな関数に対する上に凸、下に凸の定義(これらは高校数学 III で学習済み)が理解できていればよい、つまり、次の定理で関数の凹凸と第2次導関数の関係が把握できれば十分だからである。

定理 3.3. $f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続, 开区間 (a, b) で2回微分可能な関数とする。

- (1) (a, b) で $f''(x) > 0$ ならば, $f(x)$ は $[a, b]$ で下に凸である。
- (2) (a, b) で $f''(x) < 0$ ならば, $f(x)$ は $[a, b]$ で上に凸である。

関数のグラフはその定義域で常に上に凸(または、下に凸)とは限らず、凹凸が変化することもある。その点を境に凹凸が変化するような点を変曲点というが、滑らかな関数の場合に限って定義を与える。

定義 3.1. $f(x)$ を开区間 (a, b) で定義された2回微分可能な関数とする。 $f''(c) = 0$ ($c \in (a, b)$) で $x = c$ を境に $f''(x)$ の正負が変わるとき, 点 $(c, f(c))$ を $y = f(x)$ のグラフの**変曲点**という

凹凸を考慮した関数のグラフの描き方は高校数学 III で勉強しているので、この資料では省略する。

3.4 不定形の極限

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ が $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ のようになっている場合, **不定形の極限**という。不定形の極限を求めるのに有用なのが次の **L'Hospital の定理**である。

定理 3.4. $f(x), g(x)$ がともに $x = a$ を含む小区間 I で連続で $f(a) = g(a) = 0$ とする。更に $f(x), g(x)$ は $x = a$ 以外で微分可能であり, $g'(x) \neq 0$ ($x \in I, x \neq a$) とする。このとき,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

が成り立つ。

⁹曲率という概念を導入することでこの考えは正しいことが示せる。

注意 3.2. この定理の主張を単に

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

と覚えている場合があるが、これは正しいとは言えない。この等式が成り立つには極限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在しなければならない。

定理 3.4 を使って不定形の極限を計算するには、上の注意で述べたように、まず $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在することを確認しなければならない。多くの教科書の例題等ではそのように見えない説明になっているので、この点は誤解しないでもらいたい。L'Hospital の定理を使った不定形の極限の計算は、回りくどいようではあるが、実際には次の例のようになる。

例 3.1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$ を求める。これは $\frac{0}{0}$ の形をした不定形の極限である。そこで、

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + x - 6)'}{(x^2 - 4)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 1}{2x} = \frac{5}{4}$$

なので、定理 3.4 より

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{5}{4}.$$

定理 3.4 は繰り返し使うことができる。

例 3.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ を求める。これは $\frac{0}{0}$ の形をした不定形の極限である。ここで

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$$

であるが、これも不定形の極限である。更に

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

従って定理 3.4 を 2 回使って

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

上の 2 つの例を見ると定理 3.4 は不定形の極限を求める際には非常に強力な道具のように見える。しかし、次の例はこの定理に頼りすぎるのは危険であることを示している。

例 3.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$ を求める。これは $\frac{0}{0}$ の形をした不定形の極限である。ここで、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 \sin(1/x))'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin(1/x) - \cos(1/x)}{\cos x}$$

となる. ここで $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ であるが, $\lim_{x \rightarrow 0} \{2x \sin(1/x) - \cos(1/x)\}$ は存在しない. 従って定理 3.4 を用いて極限を求めることはできない.

この場合は

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x}{\sin x} = 0 \cdot 1 = 0$$

となる.

この例は $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ が存在しても $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在しない場合があることも示している.

注意 3.3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ であって

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が存在すれば, 定理 3.4 の主張は成り立つ. また, 定理 3.4 や上の主張において $x \rightarrow a$ を $x \rightarrow \pm\infty$ としても成り立つ.

例 3.4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}}$ を求める. これは $\frac{+\infty}{+\infty}$ 型の不定形である. そこで,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

よって,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0.$$

3.5 Taylor の定理

関数の値を正確に知りたいというのは自然な願望と考えられる. しかし, 現実には難しいことが多い. 例えば, $\sin 0 = 0$ は三角関数を勉強すれば誰でも知ることだが, $\sin 0.1$ や $\sin 0.01$ の値を正確に知ることはまず不可能である. すると, 正確な値を求めることはあきらめて, 例えば小数第 2 位あるいは第 3 位までの値が正確に求まればヨシとすることがよくある. このような行為を近似¹⁰という. 関数の近似方法はいろいろあると思われるが, 最初に考えるのは計算しやすい多項式で近似することであろう.

そこで次のように考えてみる. 関数 $f(x)$ は無限回微分可能¹¹とし, $f(x)$ は

$$(3.1) \quad f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

¹⁰詳しく言うと, 近似とは複雑な対象の解析を容易にするため, 細部を無視し, 単純化して考えること. またそのようにして得られた値やモデルのことである. このような単純化は解析の有効性を失わない範囲で行わねばならないが, その範囲は実際にそのモデルの解析を行わないとわからないことが多い.

¹¹何回も際限なく微分可能な関数を無限回微分可能な関数, または C^∞ 級関数という.

と表すことができるとする. $f(0), f'(0), f''(0), \dots, f^{(n)}(0), \dots$ がわかっているとして, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ の値を決める. まず, (3.1) において $x = 0$ を代入すると $a_0 = f(0)$ を得る. (3.1) の両辺を微分すると

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

となり, $x = 0$ を代入すると $a_1 = f'(0)$ を得る. 更に, 両辺を微分して $x = 0$ を代入すると $a_2 = \frac{f''(0)}{2}$ となる. この操作を推し進めていくと $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ が得られ, 結局

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

となる.

上の式の右辺は無限和になっており, その収束・発散を考えねばならない. また, 実際には無限和ではなく有限和で近似するのだから, その正当性を何らかの形で示さねばならない. 後者に関しては次の定理が成り立つ.

定理 3.5. $f(x)$ が $[a, b]$ で C^{n-1} 級で, (a, b) で n 回微分可能であれば,

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n,$$

$$R_n = \frac{f^n(c)}{n!}(b-a)^n \quad (c \in (a, b))$$

が成り立つ.

この定理を **Taylor の定理** といい, R_n を **剰余項** という. 上の式を

$$f(b) - \left\{ f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} \right\} = R_n$$

と見ると

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= (\text{真の値}) - (n-1) \text{ 次多項式による近似値}, \\ R_n &= \text{左辺の誤差}. \end{aligned}$$

となっていることがわかる.

定理 3.5 の式において $b = a + h, c = a + \theta h$ ($\theta \in (0, 1)$) とおくと

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + R_n,$$

$$R_n = \frac{f^n(a+\theta h)}{n!}h^n \quad (\theta \in (0, 1))$$

と書き換えられる. この場合 h は正でも負でもよいことに注意する.

更に, 上式において $a = 0, b = x$ とおくと次の定理が得られる.

定理 3.6. $I \subset \mathbb{R}$ を 0 を含む区間で $f(x)$ は I で n 回微分可能ならば, $x \in I$ に対して

$$f(x) = f(0) + f'(x)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n,$$

$$R_n = \frac{f^n(\theta x)}{n!}x^n \quad (\theta \in (0, 1))$$

が成り立つ.

この定理は **Maclaurin の定理** と呼ばれるが, 定理 3.5 と区別しないこともしばしばある.

例 3.5. $f(x) = \sin x$ として $\sin 0.01$ の近似値を求めてみる. 定理 3.6 より

$$f(x) = x - \frac{\cos 0.01\theta}{6}(0.01)^3 \quad (\theta \in (0, 1))$$

となる. この式より $\sin 0.01$ の近似値は 0.01 で誤差は

$$\left| \frac{\cos 0.01\theta}{6}(0.01)^3 \right| \leq \frac{1}{6 \cdot 10^6}$$

である.

この結果より $|x|$ が十分小さいときは $\sin x \simeq x$ としてよいといえる.

$I \subset \mathbb{R}$ を 0 を含む区間で $f(x)$ は I で無限回微分可能とする. 定理 3.6 より, 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して

$$(3.2) \quad f(x) = f(0) + f'(x)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n,$$

$$R_n = \frac{f^n(\theta x)}{n!}x^n \quad (\theta \in (0, 1))$$

が成り立つ. ここで

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$$

を成り立つならば, (3.2) で $n \rightarrow +\infty$ とすると

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(x)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \end{aligned}$$

が得られる. これを $f(x)$ の **Maclaurin 展開**, または $x = 0$ での **Taylor 展開** という. 典型的な例を示しておく.

例 3.6. $x \in \mathbb{R}$ として

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$