

消費者選好と効用関数

合理的な消費者

いま A, B, C というラベルのついた 3 つのバスケットのそれぞれに、消費者が消費しようとする m 種類の財 $x_i \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, m$) が入っている

$$\mathbf{x}^A = (x_1^A, x_2^A, \dots, x_m^A), \mathbf{x}^B = (x_1^B, x_2^B, \dots, x_m^B), \mathbf{x}^C = (x_1^C, x_2^C, \dots, x_m^C) \in \mathbf{R}_+^m$$

選好関係

2 つの選好対象 $\mathbf{x}^A$ と $\mathbf{x}^B$ について、次の選好関係を定義する

$\mathbf{x}^A R \mathbf{x}^B$: $\mathbf{x}^A$ は $\mathbf{x}^B$ と同程度か $\mathbf{x}^B$ より好まれる

$\mathbf{x}^A P \mathbf{x}^B$: $\mathbf{x}^A$ は $\mathbf{x}^B$ より好まれる

$\mathbf{x}^A I \mathbf{x}^B$: $\mathbf{x}^A$ と $\mathbf{x}^B$ は同程度に好まれる

このとき P と I の関係は R によって表すことができる

$\mathbf{x}^A P \mathbf{x}^B \Leftrightarrow \mathbf{x}^A R \mathbf{x}^B$ であるが $\mathbf{x}^B R \mathbf{x}^A$ ではない

$\mathbf{x}^A I \mathbf{x}^B \Leftrightarrow \mathbf{x}^A R \mathbf{x}^B$ であり、かつ $\mathbf{x}^B R \mathbf{x}^A$ である

選好の合理性 (公理)

● 完備性 (completeness)

どのような消費対象についても、消費者は明確に比較できることを保証する条件

$\mathbf{x}^A R \mathbf{x}^B$ と $\mathbf{x}^B R \mathbf{x}^A$ のうちの少なくとも 1 つが成立する

ここで、 $\mathbf{x}^B = \mathbf{x}^A$ のとき $\mathbf{x}^A R \mathbf{x}^A$ が成立することを反射性 (reflexivity) を満たすという

● 推移性 (transitivity)

消費者の選好順序に矛盾がないことを保証する条件

3 つの選好対象 $\mathbf{x}^A, \mathbf{x}^B, \mathbf{x}^C$ について、 $\mathbf{x}^A R \mathbf{x}^B$ かつ $\mathbf{x}^B R \mathbf{x}^C$ ならば $\mathbf{x}^A R \mathbf{x}^C$ が成立する

選好と消費量の関係 (仮定)

● 強い単調性 (strong monotonicity, desirability assumption)

バスケットのなかの各財は goods であり、それぞれの財について量が多い方が好ましい

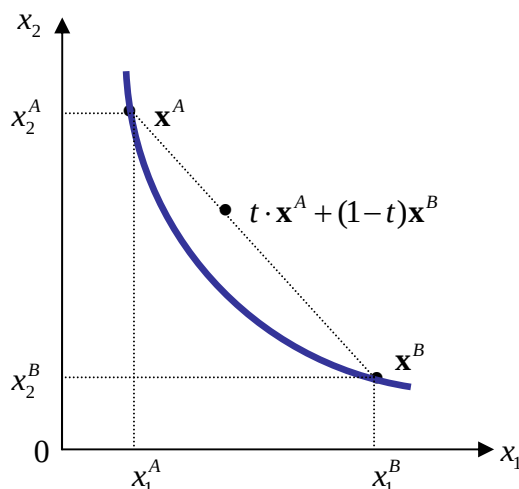
$\mathbf{x}^A > \mathbf{x}^B$ ならば $\mathbf{x}^A P \mathbf{x}^B$ である (不等号 $>$ は量の大小関係)

● 強い凸性, 凸選好 (strong convexity, convex preference)

消費者の満足水準が一定であれば、バスケットのなかのある 1 財の消費量を増加させるためにこの消費者が諦める他の 1 財の量は、ある 1 財の量が増加するにつれて減少する

任意の実数 t ($0 < t < 1$) について、 $\mathbf{x}^A I \mathbf{x}^B$ であれば $\{t \cdot \mathbf{x}^A + (1-t)\mathbf{x}^B\} P \mathbf{x}^A$ である

$\mathbf{x}^A = (x_1^A, x_2^A), \mathbf{x}^B = (x_1^B, x_2^B) \in \mathbf{R}_+^2$ のとき,



選好と効用関数

消費者の選好が完備性, 推移性, 強い単調性, ならびに連続性 (continuity: 選好順序がジャンプしないための条件) の性質を満たすとき, $\mathbf{R}_+^m$ から $\mathbf{R}$ への実数関数 (効用関数 $U(\bullet) : \mathbf{x}^A R \mathbf{x}^B \Rightarrow U(\mathbf{x}^A) \geq U(\mathbf{x}^B)$) が存在する

- 効用関数 (utility function) $U = U(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^m$
 $\mathbf{x}^A R \mathbf{x}^B \Rightarrow U(\mathbf{x}^A) \geq U(\mathbf{x}^B)$ であるように, 効用の大小で選好関係を表す関数

大学院 $\Rightarrow$ 連続性: 奥野・鈴木『ミクロ経済学 I』

任意の $\mathbf{x}^A \in \mathbf{R}_+^m$ に対して $R(\mathbf{x}^A) \equiv \{\mathbf{x}^B \in \mathbf{R}_+^m \mid \mathbf{x}^B R \mathbf{x}^A\}$ と $\bar{R}(\mathbf{x}^A) \equiv \{\mathbf{x}^B \in \mathbf{R}_+^m \mid \mathbf{x}^B R \mathbf{x}^A\}$ は $\mathbf{R}_+^m$ 内の閉集合である $\Rightarrow I(\mathbf{x}^A) \equiv R(\mathbf{x}^A) \cap \bar{R}(\mathbf{x}^A) = \{\mathbf{x}^B \in \mathbf{R}_+^m \mid \mathbf{x}^B R \mathbf{x}^A \text{ かつ } \mathbf{x}^A R \mathbf{x}^B\}$ とすると, $\mathbf{R}_+^m$ 内のどの点も $R(\mathbf{x}^A)$ か $\bar{R}(\mathbf{x}^A)$ のいずれかに属し, $I(\mathbf{x}^A)$ は $R(\mathbf{x}^A)$ と $\bar{R}(\mathbf{x}^A)$ の境界を表す

大学院 $\Rightarrow$ 関数の形状

完備性, 推移性, 強い単調性, 連続性に加えて, 消費者の選好が強い凸性の性質を満たすとき, 効用関数は強い準凹関数 (strictly quasi-concave function) となる

- 凹関数 (concave function): $f(\theta x^0 + (1-\theta)x^1) \geq \theta f(x^0) + (1-\theta)f(x^1)$
- 強い凹関数 (strictly concave function): $f(\theta x^0 + (1-\theta)x^1) > \theta f(x^0) + (1-\theta)f(x^1)$
- 準凹関数 (quasi-concave function): $f(x^1) \geq f(x^0)$ のとき $f(\theta x^0 + (1-\theta)x^1) \geq f(x^0)$
- 準凹関数 $\supset$ 凹関数 $\supset$ 強い凹関数

- 序数的効用 (ordinal utility : U^o)

消費者の選好関係は序列 (好きな順番) が与えられるだけなので、効用関数も選好の序列を表せば十分であるという考え方 $\Rightarrow$ 無差別曲線 (indifference curve) 分析

大学院 $\Rightarrow U^o(\mathbf{x})$ は準凹関数

- 基数的効用 (cardinal utility : U^c)

重さや長さなどと同様に、効用についても四則演算が意味を持つという考え方

$\Rightarrow$ 限界効用 (marginal utility) 分析

$U^c = U^c(\mathbf{x})$, $MU_i^c = \partial U^c / \partial x_i \Rightarrow$ 限界効用を定義

大学院 $\Rightarrow U^c(\mathbf{x})$ は強い凹関数 $\Rightarrow$ 無差別曲線分析よりも強い仮定

効用最大化

予算制約

- 購買可能集合 (budget set)

$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ のとき, $B(\mathbf{p}, I) \equiv \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{R}_+^m \mid \mathbf{p}^t \mathbf{x} \leq I, \mathbf{x} \geq 0\}$

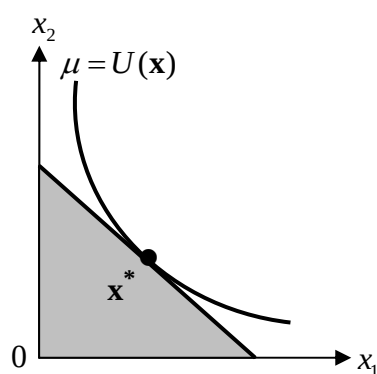
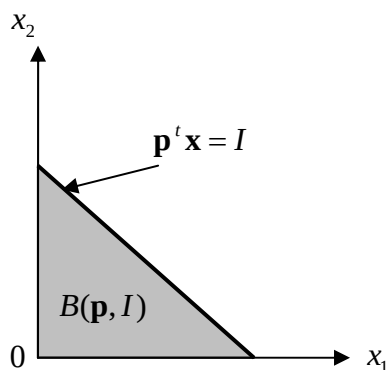
- 予算制約線 (budget constraint line) $\mathbf{p}^t \mathbf{x} = I \Rightarrow$ 購買可能集合の上限

効用最大化の条件

- 効用最大化の条件 $\Rightarrow U(\mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{p}, I)} U(\mathbf{x})$

$\mathbf{p}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^2$ のとき $\Rightarrow$ 解は $\mathbf{x}$ 平面における無差別曲線と予算制約線との接点で与えられる

$\mathbf{p}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^2$ のとき



$$\begin{cases} U = U(x_1, x_2) \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I \end{cases}$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0 \Leftarrow \text{無差別曲線 (indifference curve) の条件 (効用水準一定)}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2} = MRS_{12} \quad (\text{無差別曲線の接線の傾き} \times (-1) = \text{限界代替率})$$

$$x_2 = -\frac{p_1}{p_2} x_1 + \frac{I}{p_2} \Leftrightarrow -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{p_1}{p_2} \Leftarrow \text{予算制約線の傾き} \times (-1)$$

$$\text{最大化の条件} \Rightarrow \text{無差別曲線と予算制約線が接する条件} : \frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2} = MRS_{12} = \frac{p_1}{p_2}$$

• 限界代替率 (MRS : marginal rate of substitution)

無差別曲線上における x_1 財と x_2 財との交換比率 $\Leftarrow$ 無差別曲線分析

限界代替率逓減の法則 (law of diminishing marginal rate of substitution)

$\Rightarrow$ 無差別曲線上では, x_1 財が増加するにつれて限界代替率は逓減する

$\Rightarrow x_1$ 財が増加するにつれて, x_1 財の追加分と交換してもよいと思う x_2 財の数量は減少する

$\Rightarrow$ 無差別曲線は原点に対して凸な右下がりの曲線である

• 通常需要関数 (ordinary demand function, Marshallian demand function)

$$B(\mathbf{p}, I) \equiv \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{R}_+^m \mid \mathbf{p}^t \mathbf{x} \leq I, \mathbf{x} \geq 0\} \text{ のとき,}$$

$$\mathbf{x}^* = \arg \max_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{p}, I)} U(\mathbf{x}) = d(\mathbf{p}, I) = \{d_1(\mathbf{p}, I), d_2(\mathbf{p}, I), \dots, d_m(\mathbf{p}, I)\} \text{ を満たす } d_i(\mathbf{p}, I)$$

を i 財の通常需要関数という

(数学注：西村和雄『経済数学早わかり』日本評論社)

集合

$\mathbf{R}$: 実数全体の集合

$\mathbf{R}^m$: m 次元の実数集合, $\mathbf{R}^m$ の任意の要素は m 次元ベクトル

$\mathbf{R}_+^m = \{x \in \mathbf{R}^m \mid x \geq 0\} \Rightarrow \mathbf{R}^m$ の非負象限

ベクトル

2 つの行ベクトル ($1 \times m$) $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ の内積

$\Rightarrow \mathbf{p}^t \mathbf{x} = \sum_{i=1}^m p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_m x_m$, ${}^t \mathbf{x}$ は $\mathbf{x}$ の転置ベクトル ($m \times 1$)

微分 (1 変数)

$y = f(x)$ において, x^0 から x への変化に対する $f(x)$ の変化分 $\Rightarrow f(x) - f(x^0)$

このとき平均変化率は $\frac{f(x) - f(x^0)}{x - x^0}$ 。この極限值: $\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{f(x) - f(x^0)}{x - x^0} = f'(x^0)$ を $x = x^0$

における $f(x)$ の微分係数という

$f(x)$ が X の各点 x で微分可能であるとき, x に対して $f(x)$ の微分係数 $f'(x)$ を対応させる関数を導関数という: $f': x \rightarrow f'(x)$

ここで $f(x) - f(x^0) = \Delta f$, $x - x^0 = \Delta x$ とおくと, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$

微分 (多変数)

偏微分: $X \subset \mathbf{R}^n$, $Y \subset \mathbf{R}$ に対して関数 $f: X \rightarrow Y$ を考える

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ で x_1 以外の成分を固定して 1 変数の場合と同様に扱う

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の x_1 以外の成分を $x_i = x_i^0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) と固定して, あたかも x_1 のみの

関数のように扱う。 x_1 で微分すると, $\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \frac{f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{x_1 - x_1^0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0)$

これを f の $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ における第 1 偏微係数という

需要量を変化させる要因（比較静学）

所得の変化

所得の変化 $\Rightarrow$ 予算制約線の平行移動

$$B(\mathbf{p}, I) \equiv \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{R}_+^m \mid \mathbf{p}^t \mathbf{x} \leq I, \mathbf{x} \geq 0\}$$

$$B(\mathbf{p}, I') \equiv \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{R}_+^m \mid \mathbf{p}^t \mathbf{x} \leq I', \mathbf{x} \geq 0\}$$

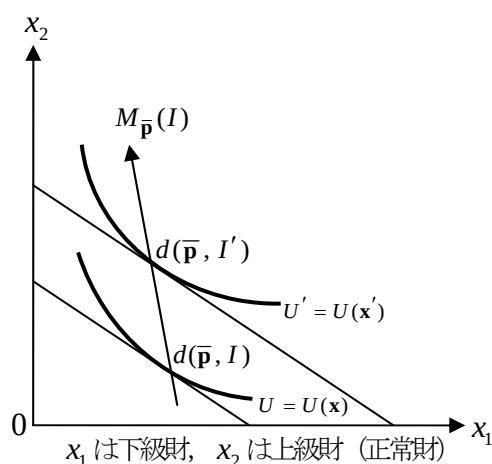
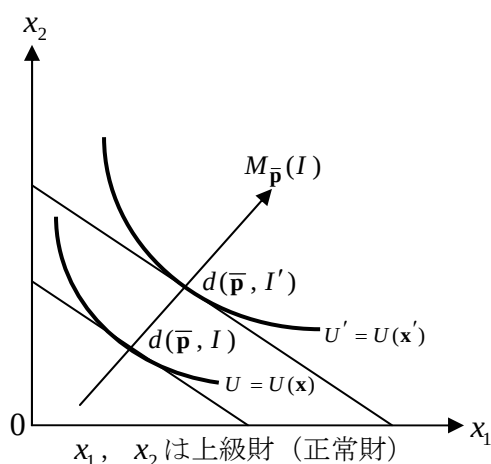
$$\Rightarrow I < I' \Leftrightarrow B(\mathbf{p}, I) \subset B(\mathbf{p}, I')$$

● 所得消費曲線（income-consumption curve）

$\rightarrow$ 財の価格を一定として、所得が変化したときの需要量の軌跡

$$\mathbf{x}^* = \arg \max_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{p}, I)} U(\mathbf{x}) = d(\mathbf{p}, I) \text{ のとき, } M_{\bar{\mathbf{p}}}(I) = \left\{ d(\bar{\mathbf{p}}, I) \in \mathbf{R}_+^m \mid I > 0 \right\}$$

$$\mathbf{p}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^2 \Rightarrow d(\bar{\mathbf{p}}, I) = \{d_1(\bar{p}_1, \bar{p}_2, I), d_2(\bar{p}_1, \bar{p}_2, I)\}$$



● 上級財（superior goods），正常財（normal goods）： $\partial d_i(\bar{\mathbf{p}}, I)/\partial I \geq 0$

● 下級財，劣等財（inferior goods）： $\partial d_i(\bar{\mathbf{p}}, I)/\partial I < 0$

● 需要の所得弾力性（income elasticity of demand）： $\eta_I = \frac{\partial d_i(\mathbf{p}, I)}{\partial I} \frac{I}{d_i(\mathbf{p}, I)} = \frac{\partial \ln d_i(\mathbf{p}, I)}{\partial \ln I}$

$\rightarrow$ 価格を一定として、所得の変化率に対する需要量の変化率のこと（ $M_{\bar{\mathbf{p}}}(I)$ 上の動き）

例) $\eta_I = 0.8 \Rightarrow$ 他の条件を一定として、所得が 10% 増加すると需要量は 8% 増える

● 需要の所得弾力性による財の分類

① $\eta_I > 0 \Leftrightarrow$ 上級財 (superior goods) または正常財 (normal goods)

$0 < \eta_I < 1 \Leftrightarrow$ 必需品 (necessities) である上級財

$\eta_I > 1 \Leftrightarrow$ 奢侈品, 贅沢品 (luxuries) である上級財

② $\eta_I = 0 \Leftrightarrow$ 中級財, 中立財 (neutral goods)

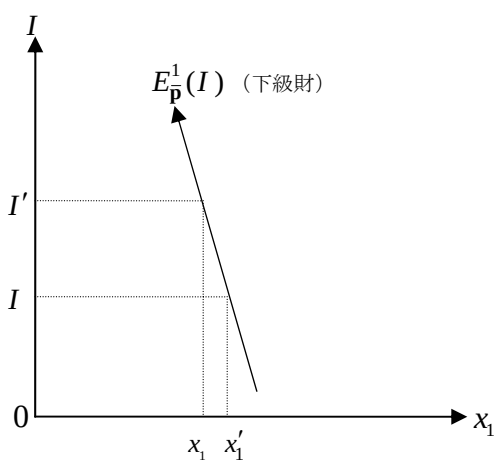
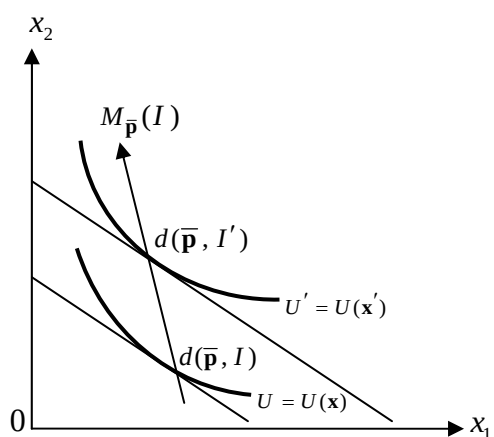
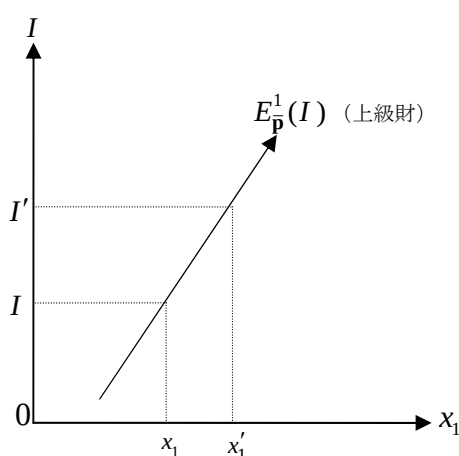
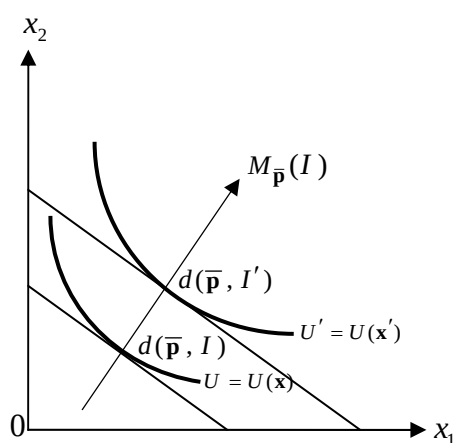
③ $\eta_I < 0 \Leftrightarrow$ 下級財 (inferior goods) または劣等財 (inferior goods)

● エンゲル曲線 (Engel curve)

→ 財の価格を一定として, 所得が変化したときの第 i 財の需要量の変化の軌跡

$$E_{\bar{\mathbf{p}}}^i(I) = d_i(\bar{\mathbf{p}}, I)$$

$$\mathbf{p}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^2 \Rightarrow d_i(\bar{\mathbf{p}}, I) = d_i(\bar{p}_1, \bar{p}_2, I)$$



- エンゲル係数 (Engel coefficient : $e_i = p_i d_i(\mathbf{p}, I)/I$)

→ 所得に占める飲食費の割合をエンゲル係数という

- 需要の所得弾力性 (η_i) とエンゲル係数

$$d(e_i)_{d\mathbf{p}=0} = d\left(\frac{p_i d_i(\mathbf{p}, I)}{I}\right)_{d\mathbf{p}=0} = \frac{1}{I^2} \{ I \cdot p_i \cdot d(d_i(\mathbf{p}, I)) - p_i d_i(\mathbf{p}, I) \cdot dI \}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial e_i}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{p_i d_i(\mathbf{p}, I)}{I} \right) = \frac{p_i}{I} \frac{\partial d_i(\mathbf{p}, I)}{\partial I} - \frac{p_i d_i(\mathbf{p}, I)}{I^2} = \frac{p_i d_i(\mathbf{p}, I)}{I^2} \left(\frac{\partial d_i(\mathbf{p}, I)}{\partial I} \frac{I}{d_i(\mathbf{p}, I)} - 1 \right)$$

$$= e_i (\eta_i - 1) / I$$

$$\Rightarrow \frac{\partial e_i}{\partial I} \begin{cases} \geq \\ \leq \end{cases} 0 \Leftrightarrow \eta_i \begin{cases} \geq \\ \leq \end{cases} 1$$

1 財価格の変化

1 財価格の変化 $\Rightarrow$ 予算制約線の回転

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_i, p_{i+1} \dots p_m), \mathbf{p}' = (p_1, p_2, \dots, p'_i, p_{i+1} \dots p_m)$$

$$B(\mathbf{p}, I) \equiv \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{R}_+^m \mid \mathbf{p}' \mathbf{x} \leq I, \mathbf{x} \geq 0 \}$$

$$B(\mathbf{p}', I) \equiv \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{R}_+^m \mid \mathbf{p}' \mathbf{x} \leq I, \mathbf{x} \geq 0 \}$$

$$\Rightarrow p_i > p'_i \Leftrightarrow B(\mathbf{p}, I) \subset B(\mathbf{p}', I)$$

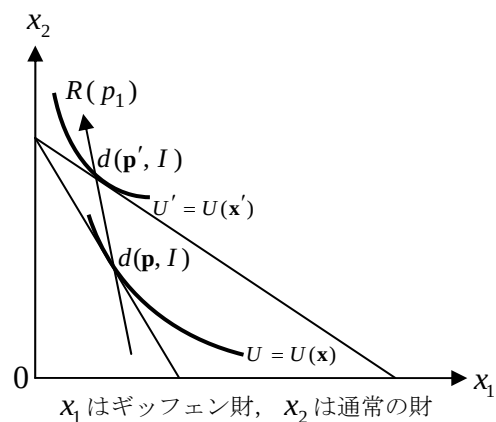
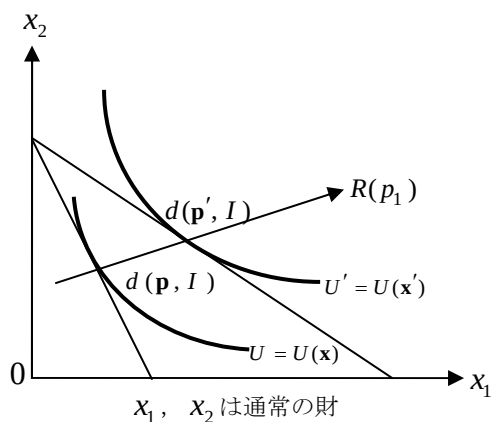
- 価格消費曲線(price-consumption curve)

→ 所得と $j \neq i$ 財の価格を一定として, i 財の価格が変化したときの需要量の軌跡

$$R(p_i) = \{ d_i(p_i, \bar{\mathbf{p}}_{\neq i}, \bar{I}) : p_i > 0 \}$$

$$\mathbf{p}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^2 \Rightarrow d(\mathbf{p}, I) = \{ d_1(p_1, p_2, I), d_2(p_1, p_2, I) \}$$

$$d(\mathbf{p}', I) = \{ d_1(p'_1, p_2, I), d_2(p'_1, p_2, I) \} \quad , \quad p_1 > p'_1$$

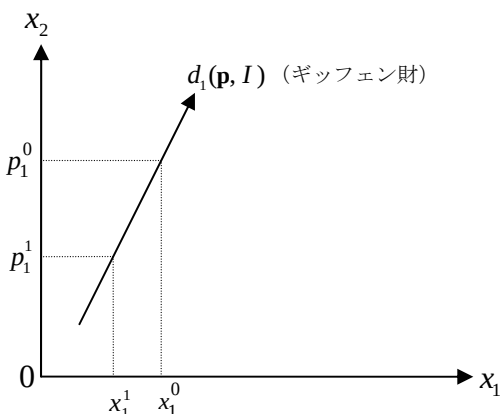
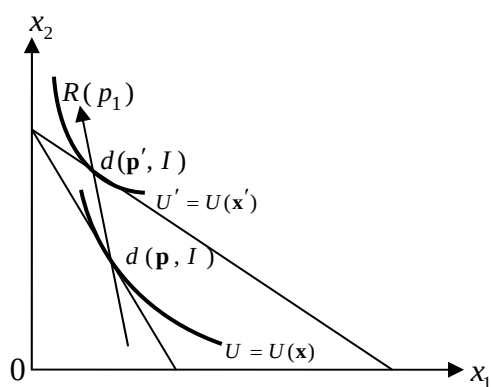
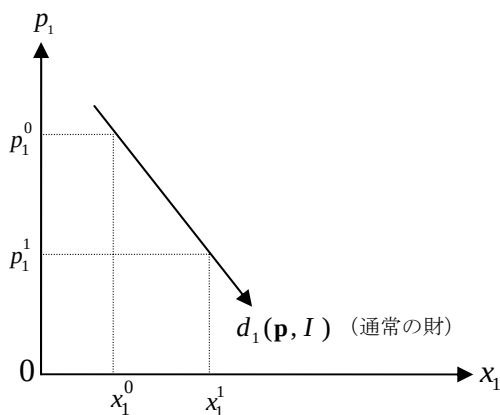
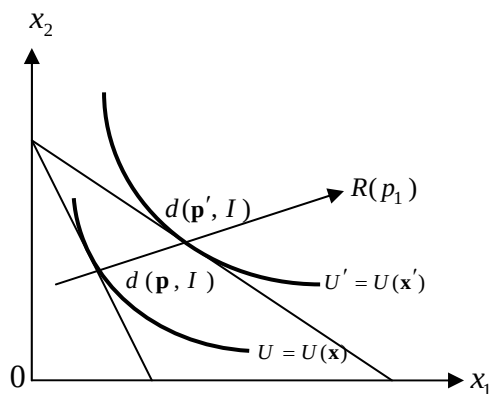


● 通常需要曲線 (ordinary demand curve : $x_i = d_i(\mathbf{p}, I)$)

→ 所得と $j \neq i$ 財の価格を一定として、第 i 財の価格変化による第 i 財の需要量変化の軌跡

$$\mathbf{p}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^2 \Rightarrow d_1(p_1^0, p_2, I) = x_1^0$$

$$d_1(p_1^1, p_2, I) = x_1^1, \quad p_1^0 > p_1^1$$



● ギッフェン財 (Giffen goods)

→ 通常需要曲線が右上がりとなる財 (ローカルに成立)

● 需要の自己価格弾力性 (own price elasticity of demand) :

$$\eta_{p_{ii}} = - \frac{\partial d_i(\mathbf{p}, I)}{\partial p_i} \frac{p_i}{d_i(\mathbf{p}, I)} = - \frac{\partial \ln d_i(\mathbf{p}, I)}{\partial \ln p_i}$$

→ 他の条件一定のもとで、 i 財の価格変化率に対する i 財の需要量変化率のこと

($d_i(\mathbf{p}, I)$ 上の動きを正值で定義)

例) $\eta_{p_{ii}} = 0.8 \Rightarrow$ 他の条件一定のもとで、 i 財価格が 10% 上昇すると i 財需要量は 8% 減少する

代替効果と所得効果

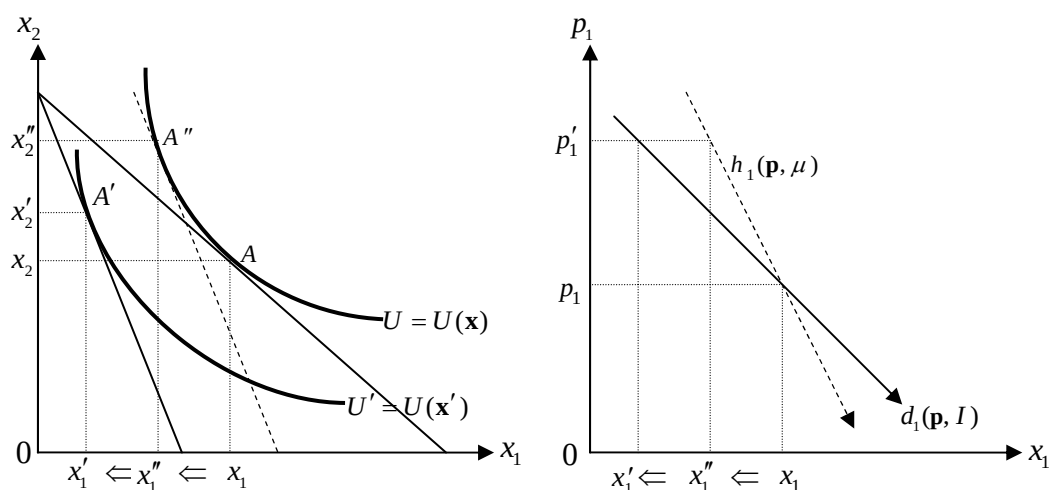
当初、所得 I のもとで A 点にいた消費者は、 x_1 財の価格が p_1 から p'_1 に上昇したため、 A' 点に移った。このときの $A \rightarrow A'$ の動きを、 $A \rightarrow A''$ と $A'' \rightarrow A'$ の2つに分解して考える。ここで、価格変化後に A 点と同じ効用を与える所得を I' とすると、 A'' 点は I' のもとで A 点と無差別な均衡点を表す。

①価格変化前の位置：点 $A(x_1, x_2) \Leftarrow$ 名目所得 I ，価格 (p_1, p_2)

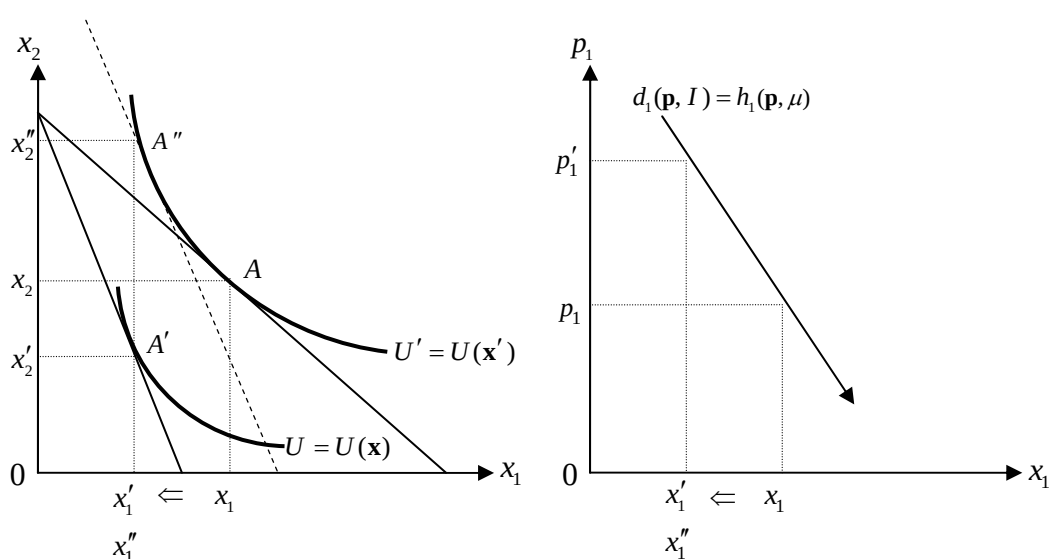
②価格変化後の位置：点 $A'(x'_1, x'_2) \Leftarrow$ 名目所得 I ，価格 (p'_1, p_2) ， $p'_1 > p_1$

③価格変化後に①と無差別な仮想的な位置：点 $A''(x''_1, x''_2) \Leftarrow$ 名目所得 I' ，価格 (p'_1, p_2)

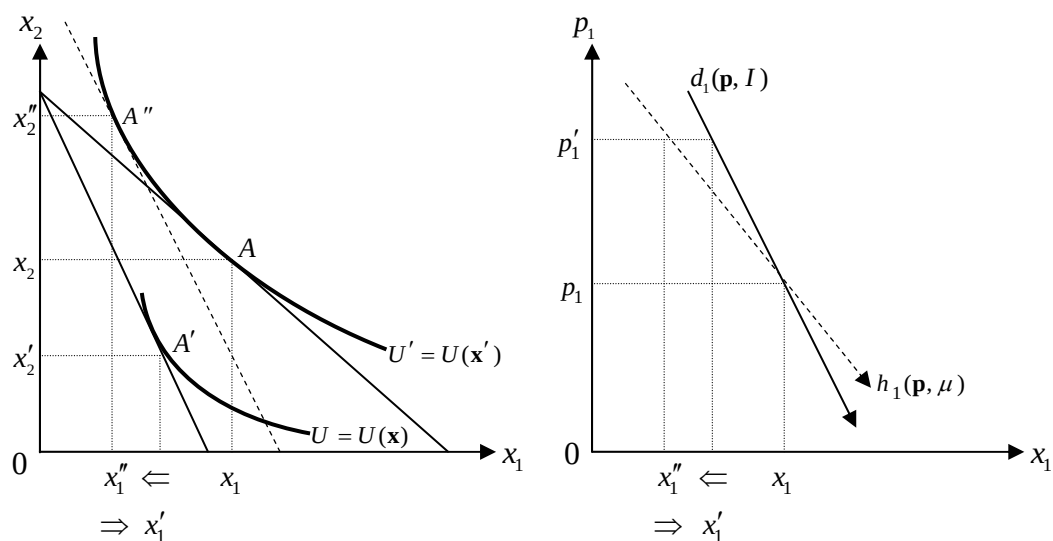
(a) 上級財のケース



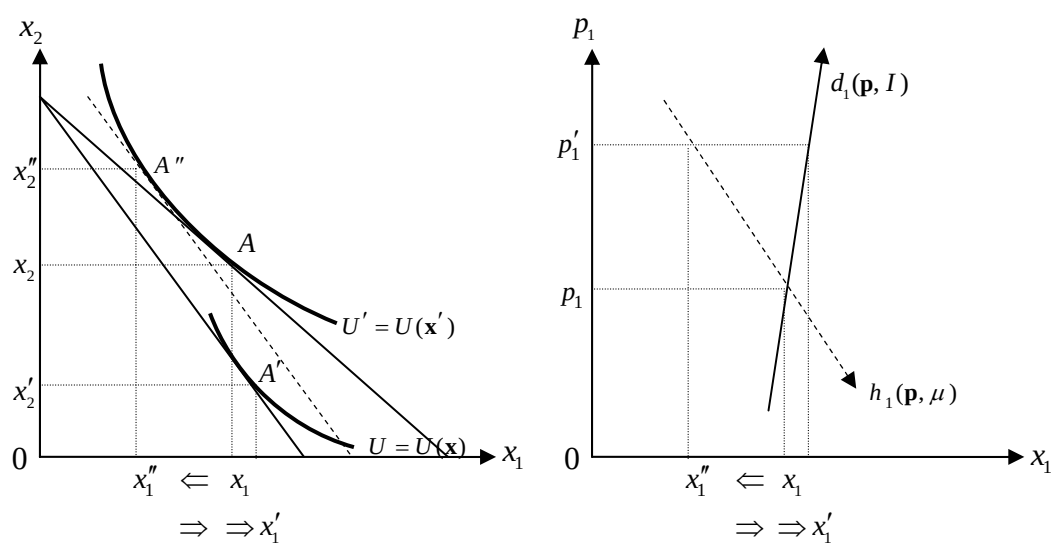
(b) 中級財のケース



(c) 下級財のケース



(d) ギッフェン財のケース



- 1 財価格の変化: $A \rightarrow A' \Rightarrow$ (代替効果: $A \rightarrow A''$) + (所得効果: $A'' \rightarrow A'$)
 - 代替効果 (substitution effect) $\Rightarrow$ 相対価格変化の効果: $se_{x_i} = (\partial x_i / \partial p_i)_{dU=0} < 0$
 - 所得効果 (income effect) $\Rightarrow$ 実質所得変化の効果: $ie_{x_i} = -x_i \cdot (\partial x_i / \partial I)$
- $ie_{x_i} < 0 \Rightarrow$ 上級財, $ie_{x_i} = 0 \Rightarrow$ 中級財, $ie_{x_i} > 0 \Rightarrow$ 下級財, ギッフェン財

●スルツキー方程式 (Slutsky equation)

名目所得 (I) 一定で, p_i の変化による需要量の変化

$$(x'_1 - x_1) = (\text{代替効果: } x''_1 - x_1) + (\text{所得効果: } x'_1 - x''_1)$$

$$\Rightarrow dx_i \Big|_{dI=0} = dx_i \Big|_{dU=0} + \frac{\partial x_i}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial p_i} dp_i$$

$$\Rightarrow \frac{\partial x_i}{\partial p_i} \Big|_{dI=0} = \frac{\partial x_i}{\partial p_i} \Big|_{dU=0} + \frac{\partial x_i}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial p_i} = \frac{\partial x_i}{\partial p_i} \Big|_{dU=0} - x_i \frac{\partial x_i}{\partial I}$$

●所得効果の説明

価格変化による購買力＝実質所得の変化

$$\Rightarrow p_1 \text{ が } 1 \text{ 円上昇} \Rightarrow I = (p_1 + 1)x_1 = p_1 x_1 + x_1 \Rightarrow x_1 \text{ 円の購買力 (= 実質所得) 低下}$$

$$\Rightarrow \text{購買力の低下分} (-dI) = \text{価格 } 1 \text{ 円当たりの購買力変化} (x_1 \text{ 円}) \times \text{価格の上昇分}$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot dp_1 = -dI \Leftrightarrow \frac{\partial I}{\partial p_1} = -x_1 = \text{価格変化による実質所得の変化率}$$

$$\Rightarrow \text{所得効果: } \frac{\partial x_i}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial p_i} dp_i = -x_i \frac{\partial x_i}{\partial I}$$

$$\text{上級財: } se_{x_i} < 0, ie_{x_i} < 0 \Rightarrow se_{x_i} + ie_{x_i} < 0$$

$$\text{中級財: } se_{x_i} < 0, ie_{x_i} = 0 \Rightarrow se_{x_i} + ie_{x_i} < 0$$

$$\text{下級財: } se_{x_i} < 0, ie_{x_i} > 0 \Rightarrow se_{x_i} + ie_{x_i} < 0 \Leftrightarrow |se_{x_i}| > |ie_{x_i}|$$

$$\text{ギッフェン財: } se_{x_i} < 0, ie_{x_i} > 0 \Rightarrow se_{x_i} + ie_{x_i} > 0 \Leftrightarrow |se_{x_i}| < |ie_{x_i}| \quad (= \text{超下級財})$$

●補償需要曲線 (compensated demand curve: $x_i = h_i(\mathbf{p}, \mu)$)

→ 通常需要曲線 ($d_i(\mathbf{p}, I)$) から所得効果を取り除いた需要曲線

→ 代替効果を表す需要曲線

→ 実質所得と $j \neq i$ 財の価格を一定として, 第 i 財の価格変化による第 i 財の需要量変化の軌跡 (通常需要曲線で一定とされる所得は「名目所得」のこと)

$$\rightarrow \text{スルツキー方程式: } \frac{\partial d_i(\mathbf{p}, I)}{\partial p_i} = \frac{\partial h_i(\mathbf{p}, \mu)}{\partial p_i} - d_i(\mathbf{p}, I) \frac{\partial d_i(\mathbf{p}, I)}{\partial I}$$

代替効果を導出するための所得補正概念

→ 価格変化が消費者にとって有利であれば変分は正、不利であれば変分は負となる

● 補償変分 (compensated variation)

→ 価格変化の後に、消費者が価格変化前に得ていた効用水準へ引き戻すために取り去られるべき所得のこと。

① 価格が上昇した場合 ⇒ 価格上昇により消費者が失った効用をちょうど補うだけの所得を消費者に与える

② 価格が下落した場合 ⇒ 価格下落により消費者が獲得した効用をちょうど相殺するだけの所得を消費者から取り去る

したがって、価格変化が消費者の効用を増大させていれば補償変分は正、経済的変化が効用を減少させていれば補償変分は負となる。

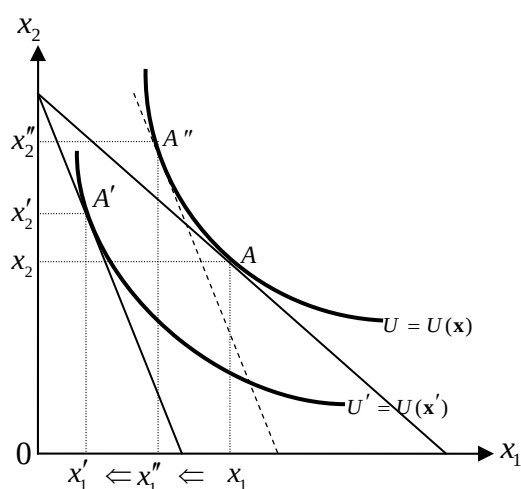
● 等価変分 (equivalent variation)

→ 価格変化の前に、価格変化後に消費者が得る効用水準と等しくするために必要な所得のこと。

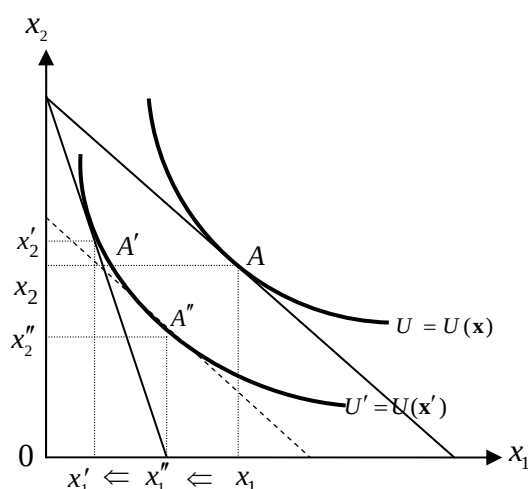
① 価格が上昇した場合 ⇒ 価格上昇により消費者が失うであろう効用をちょうど相殺するだけの所得を消費者から取り去る

② 価格が下落した場合 ⇒ 価格下落により消費者が獲得したであろう効用をちょうど補うだけの所得を消費者に与える

したがって、価格変化が消費者の効用を増大させる場合、等価変分は正、経済的変化が効用を減少させていれば等価変分は負となる。



補償変分法による所得補正



等価変分法による所得補正

● 通常需要関数と補償需要関数

(a) 通常需要関数 (ordinary demand function, Marshallian demand function)

$$B(\mathbf{p}, I) \equiv \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{R}_+^m \mid \mathbf{p}^t \mathbf{x} \leq I, \mathbf{x} \geq 0\} \text{ のとき,}$$

$$d(\mathbf{p}, I) = \arg \max_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{p}, I)} U(\mathbf{x}) \Rightarrow \text{代替効果} + \text{所得効果を表す}$$

① $d_i(\mathbf{p}, I)$ は $\mathbf{p} > 0$ と $I > 0$ について ゼロ次同次 (homogeneous of degree zero)

$$\Rightarrow d(n\mathbf{p}, nI) = d(\mathbf{p}, I) \quad (k \text{ 次同次関数の定義: } f(nx) = n^k f(x), n \text{ は正の定数})$$

$$\Rightarrow \text{すべての価格と所得が } n \text{ 倍になると, 需要量は不変 (ゼロ次同次} \rightarrow k = 0)$$

$$\textcircled{2} \mathbf{p}^t d(\mathbf{p}, I) = \sum_{i=1}^m p_i d_i(\mathbf{p}, I) = I : \text{収支均等条件 (adding-up condition)}$$

$$\Rightarrow \text{最適消費計画 } (d(\mathbf{p}, I)) \text{ を実現するためには所得の全額を支出する必要がある}$$

大学院 $\Rightarrow$ 通常需要関数の制約条件

$$\textcircled{1} \text{ゼロ次同次性条件} \rightarrow \sum_{i=1}^m \frac{\partial \ln d(\mathbf{p}, I)}{\partial \ln p_i} + \frac{\partial \ln d(\mathbf{p}, I)}{\partial \ln I} = \sum_{i=1}^m \eta_{p_i}(\mathbf{p}, I) + \eta_I(\mathbf{p}, I) = 0$$

$$\Rightarrow \text{オイラーの定理 (Euler's theorem): } k \cdot f(x) = \sum_{i=1}^m x_i (\partial f / \partial x_i), \quad k = 0 \text{ による}$$

$$\textcircled{2} \text{収支均等条件} \rightarrow \mathbf{p}^t d(\mathbf{p}, I) = \sum_{i=1}^m p_i d_i(\mathbf{p}, I) = I \rightarrow \sum_{i=1}^m e_i \frac{\partial \ln d_i(\mathbf{p}, I)}{\partial \ln I} = \sum_{i=1}^m e_i \eta_{II}(\mathbf{p}, I) = 1$$

(b) 補償需要関数 (compensated demand function, Hicksian demand function)

$$h(\mathbf{p}, \mu) = \arg \min_{\mathbf{x}: U(\mathbf{x}) \geq \mu} \mathbf{p}^t \mathbf{x} \Rightarrow \text{代替効果を表す}$$

① 所与の $U(\mathbf{x}) = \mu$ のもとで, $h_i(\mathbf{p}, \mu)$ は $\mathbf{p} > 0$ についてゼロ次同次関数

$$(\text{homogeneous function of degree zero}) \Rightarrow h_i(t\mathbf{p}, \mu) = h_i(\mathbf{p}, \mu)$$

交差効果 (cross effect) $\Rightarrow p_i$ の変化による $x_j, i \neq j$ の変化

● 交差効果のスルツキー分解 (交差効果のスルツキー方程式)

名目所得 (I) 一定で, p_i の変化による x_j 財の需要量変化

$$(x'_j - x_j) = (\text{代替効果: } x''_j - x_j) + (\text{所得効果: } x'_j - x''_j)$$

$$\Rightarrow dx_j \Big|_{dI=0} = dx_j \Big|_{dU=0} + \frac{\partial x_j}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial p_i} dp_i$$

$$\Rightarrow \frac{\partial x_j}{\partial p_i} \Big|_{dI=0} = \frac{\partial x_j}{\partial p_i} \Big|_{dU=0} + \frac{\partial x_j}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial p_i} = \frac{\partial x_j}{\partial p_i} \Big|_{dU=0} - x_i \frac{\partial x_j}{\partial I}$$

●所得効果の説明

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_i \text{ が } 1 \text{ 円上昇} &\Rightarrow I = (p_i + 1) x_i = p_i x_i + x_i \Rightarrow x_i \text{ 円の購買力 (= 実質所得) 低下} \\ \Rightarrow \text{購買力の低下分 } (-dI) &= \text{価格 } 1 \text{ 円当たりの購買力変化 } (x_i \text{ 円}) \times \text{価格の上昇分} \\ \Rightarrow x_i \cdot dp_i = -dI &\Leftrightarrow \frac{\partial I}{\partial p_i} = -x_i = \text{価格変化による実質所得の変化率} \\ \Rightarrow \left. \frac{\partial x_j}{\partial p_i} \right|_{dI=0} &= \left. \frac{\partial x_j}{\partial p_i} \right|_{dU=0} + \frac{\partial x_j}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial p_i} = \left. \frac{\partial x_j}{\partial p_i} \right|_{dU=0} - x_i \frac{\partial x_j}{\partial I} \end{aligned}$$

●粗代替財 (gross substitutes)

→ i 財の価格が上昇したとき, $j \neq i$ 財の需要量が増加すれば, j 財を i 財の粗代替財であるという (コーヒーと紅茶の関係など)

●粗補完財 (gross complements)

→ i 財の価格が上昇したとき, $j \neq i$ 財の需要量が減少すれば, j 財を i 財の粗補完財であるという (コーヒー豆とペーパーフィルターの関係など)

●需要の交差価格弾力性 (cross price elasticity of demand) :

$$\eta_{p_{ij}} = \frac{\partial d_j(\mathbf{p}, I)}{\partial p_i} \frac{p_i}{d_j(\mathbf{p}, I)} = \frac{\partial \ln d_j(\mathbf{p}, I)}{\partial \ln p_i} \quad (i \neq j)$$

→ 他の条件一定のもとで, i 財の価格変化率に対する j 財の需要量変化率のこと

例) $\eta_{p_{ij}} = 0.8 \Rightarrow$ 他の条件一定のもとで, i 財価格が 10% 上昇すると j 財需要量は 8% 増加する

1) 通常需要関数上で定義される需要の交差価格弾力性 (代替効果 + 所得効果 $\Rightarrow$ 非対称)

$$\eta_{p_{ij}} > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial p_i} d_j(\mathbf{p}, I) > 0 \Leftrightarrow j \text{ 財は } i \text{ 財の粗代替財 (gross substitutes)}$$

$$\eta_{p_{ij}} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial p_i} d_j(\mathbf{p}, I) < 0 \Leftrightarrow j \text{ 財は } i \text{ 財の粗補完財 (gross complements)}$$

2) 補償需要関数上で定義される需要の交差価格弾力性 (代替効果 $\Rightarrow$ 対称: $\eta_{p_{ij}}^C = \eta_{p_{ji}}^C$)

$$\eta_{p_{ij}}^C > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial p_i} h_j(\mathbf{p}, u) > 0 \Leftrightarrow j \text{ 財は } i \text{ 財の代替財 (substitutes)}$$

$$\eta_{p_{ij}}^C < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial p_i} h_j(\mathbf{p}, u) < 0 \Leftrightarrow j \text{ 財は } i \text{ 財の補完財 (complements)}$$

補償需要関数上では, 第 i 財に対して少なくとも 1 つの代替財 $j (\neq i)$ が存在する

厚生変化の測度

消費者余剰 (consumer surplus)

- 消費者余剰 → その財を需要することがどれくらい望ましいかを示す尺度

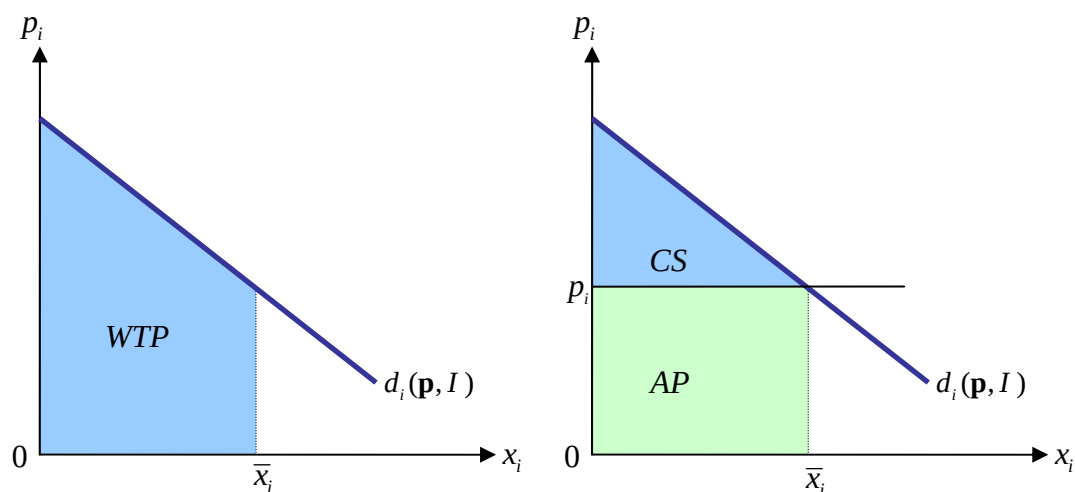
→ 消費者余剰： $CS = WTP - AP$

WTP (支払意思, 支払用意: willingness to pay)

⇒ 財を手に入れるために支払ってもよいと思う最大金額

AP (実支払: actual payment) ⇒ 実際に支払った金額

→ WTP から AP を差し引いた CS は「支払うことを辞さない実支払からの超過額」と解釈することもできる

効用最大化と消費者余剰最大化

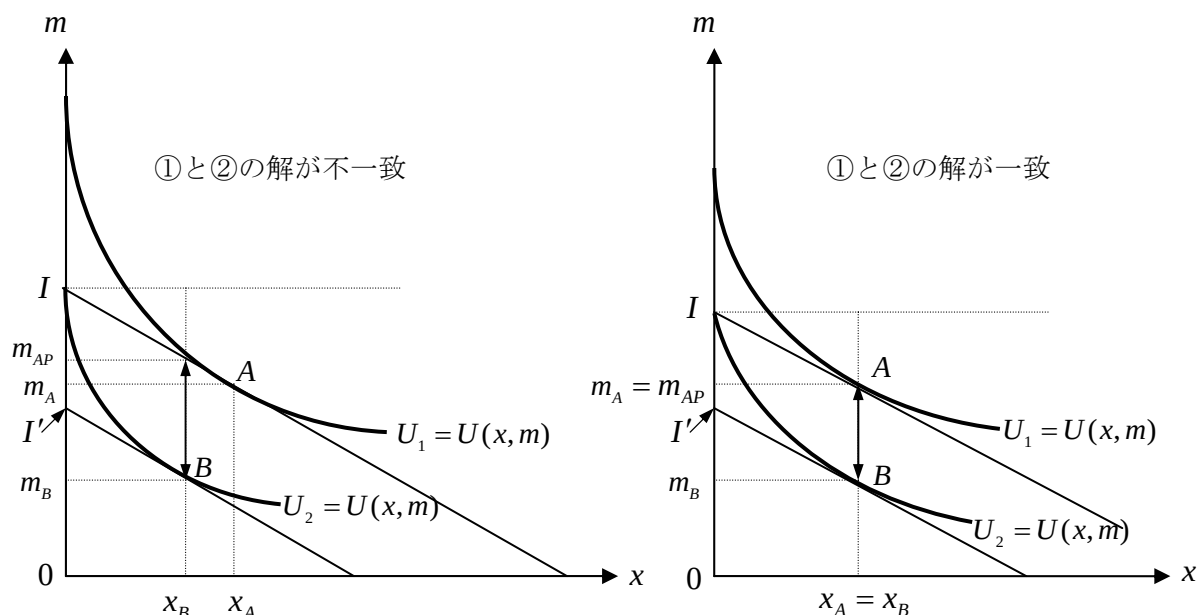
いま 2 財からなるバスケットの最適消費計画を考える。ここで 2 財のうちの 1 財に貨幣 (m) をとり, バスケットが財 x と貨幣 m の組合せで構成されとする。貨幣 m の価格は 1 である。また, 定義より WTP については $U(x, I - WTP) = U(0, I) \Leftrightarrow WTP = w(x, I)$ $w(\bullet)$ は支払意思を表す x と I の関数である

① 効用最大化による財 x の最適消費計画

$$B(\mathbf{p}, I) \equiv \{(x, m) \in \mathbf{R}_+^2 \mid p_x x + m \leq I, x \geq 0\} \text{ のとき, } x_A = \arg \max_{x, m \in B(\mathbf{p}, I)} U(x, m)$$

② 消費者余剰最大化による財 x の最適消費計画

$$x_B = \arg \max_x CS = w(x_B, I) - p_x x_B$$



①の最適消費計画： $A(x_A, m_A)$

②の最適消費計画： $B(x_B, m_B) \Rightarrow \max CS(m_{AP} - m_B) = WTP(I - m_B) - AP(I - m_{AP})$

● 効用最大化と消費者余剰最大化の最適解

① 効用最大化問題

効用最大化問題では予算制約線 $p_x x + m = I$ と無差別曲線 $U_1 = U(x, m)$ の接点 $A(x_A, m_A)$ で最適消費計画が与えられる。予算制約線の傾き（負の相対価格）は p_x ，予算制約線と縦軸の交点は $p_x \times 0 + m = I \Leftrightarrow m = I$ となる。

② 消費者余剰最大化問題

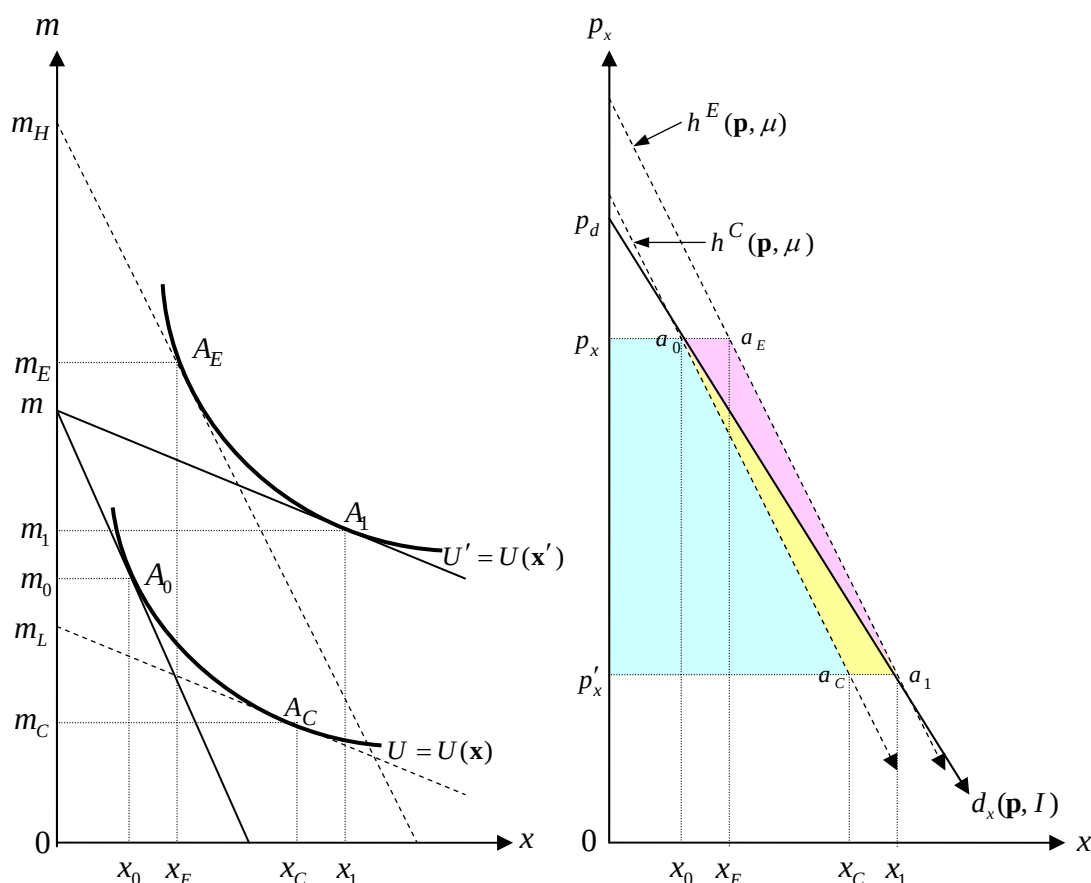
消費者余剰最大化問題では $U_2(x, I - WTP) = U_2(0, I)$ に従って、座標 $(0, I)$ から出発する無差別曲線と、傾きが p_x の予算制約線の接点 $B(x_B, m_B)$ で最適消費計画が与えられる。このときの予算制約線と縦軸との交点を I' とすると、予算制約線は $p_x x + m = I'$ で示される。 $B(x_B, m_B)$ における WTP は $U_2(x_B, I - WTP) = U_2(0, I)$ を満足する金額であり、 $I - m_B$ となる。一方、 AP は①の予算制約線 $p_x x + m = I$ に $x = x_B$ を代入したときの貨幣額 $m_{AP} = I - p_x x_B$ であり、縦軸でみると $I - m_{AP}$ の長さとなる。これより、最大化された消費者余剰は $m_{AP} - m_B$ で示される。

● 2つの最適解の関係

左上の図では①と②の解が一致せず $x_A \neq x_B$ であり、右上の図では $x_A = x_B$ となっている。 $x_A = x_B$ が成り立つための条件は何か。ここで、最大化された消費者余剰 $I - m_{AP}$ は①と②の予算制約線のシフトの大きさ $I - I'$ に等しいことに注目すると、 $A(x_A, m_A)$ と $B(x_B, m_B)$ の関係は、所得が I から I' へ変化したときの所得消費曲線上の動きとして説明される（ $CS = I - I'$ は「支払うことを辞さない実支払からの超過額」であり、この超過額を「支払った」ことを想起しよう） $\Rightarrow$ 財 x が中級財の場合、 $x_A = x_B$ が成立する。

補償変分, 等価変分, 消費者余剰の関係

再度, 2 財からなるバスケットの最適消費計画を考える。ここで 2 財のうちの 1 財に貨幣 (m) をとり, バスケットが財 x と貨幣 m の組合せで構成されるとする。貨幣 m の価格は 1 である。いま財 x の価格が p_x から p'_x に下落したため, 最適消費計画が A_0 (状態 0) から A_1 (状態 1) に変化したとしよう。



状態 0 から状態 1 への補償変分を CV^{01} , 等価変分を EV^{01} , 消費者余剰を CS^{01} とする

● 補償変分: CV^{01}

→ 価格変化の後に消費者が価格変化前に得ていた効用水準へ引き戻すために取り去られるべき所得のことであるから, p'_x で評価した貨幣量 $m - m_L$

→ $m - m_L = (m - m_0) + (m_0 - m_C) - (m_L - m_C)$

$m - m_0$: x_0 の AP $\Rightarrow$ 面積 $p_x a_0 x_0 0$

$m_0 - m_C$: 財 x を x_0 から x_C に増やすために放棄してもよい最大貨幣量

→ 効用一定のもとで, x_0 から x_C への WTP $\Rightarrow$ 面積 $a_0 a_C x_C x_0$

$m_L - m_C$: x_C の AP $\Rightarrow$ 面積 $p'_x a_C x_C 0$

→ $CV^{01} \Rightarrow$ 面積 $p_x a_0 x_0 0$ + 面積 $a_0 a_C x_C x_0$ - 面積 $p'_x a_C x_C x_0$ = 面積 $p_x a_0 a_C p'_x$

● 等価変分： EV^{01}

- 価格変化の前に、価格変化後に消費者が得る効用水準と等しくするために必要な所得のことであるから、 p_x で評価した貨幣量 $m_H - m$
- $m_H - m = (m_H - m_E) + (m_E - m_1) - (m - m_1)$
- $m_H - m_E$: x_E の AP $\Rightarrow$ 面積 $p_x a_E x_E 0$
- $m_E - m_1$: 財 x を x_E から x_1 に増やすために放棄してもよい最大貨幣量
 → 効用一定のもとで、 x_E から x_1 への WTP $\Rightarrow$ 面積 $a_E a_1 x_1 x_E$
- $m - m_1$: x_1 の AP $\Rightarrow$ 面積 $p'_x a_1 x_1 0$
- $EV^{01} \Rightarrow$ 面積 $p_x a_E x_E 0$ + 面積 $a_E a_1 x_1 x_E$ - 面積 $p'_x a_1 x_1 x_0$ = 面積 $p_x a_E a_1 p'_x$

● 消費者余剰： CS^{01}

- $CS^{01} \Rightarrow x_1$ の CS - x_0 の CS $\Rightarrow$ 面積 $p_d a_1 p'_x$ - 面積 $p_d a_0 p_x$ = 面積 $p_x a_0 a_1 p'_x$

したがって、補償変分、等価変分、消費者余剰の関係は次のとおり

- ① x が上級財の場合 $\Rightarrow CV^{01} < CS^{01} < EV^{01}$
- ② x が中級財の場合 $\Rightarrow CV^{01} = CS^{01} = EV^{01}$
- ③ x が下級財の場合 $\Rightarrow CV^{01} > CS^{01} > EV^{01}$
- ④ $CV^{01} = -EV^{10}$, $EV^{01} = -CV^{10}$ (チェックしよう)

● 所得効果，中級財，貨幣の限界効用一定

- 財 x と貨幣 m のバスケット $\Rightarrow$ 効用関数： $U = U(x, m)$
- ここで $MU_m = \partial U / \partial m = 1/k \Leftrightarrow k = 1/MU_m$ (k は定数 $\Rightarrow m$ の限界効用一定) とする
- 限界代替率： $MRS_{xm} = MU_x / MU_m = k \cdot MU_x$
- このとき $MRS_{xm} = k \cdot MU_x$ は x のみに依存する
- MRS_{xm} が貨幣 m と独立 $\Rightarrow$ 財 x は中級財 (所得が変化しても x の需要量は一定)

いま貨幣の価格を 1 として (1 円単位で貨幣量を表す)，貨幣量を m から m' に増加する

- 予算制約線の上方シフト ($px + m = I \Rightarrow px + m' = I'$, $m < m'$)
- 貨幣の限界効用一定を仮定すると x は中級財 (= 無差別曲線も上方シフト)
- x の需要量は変化せずに効用が $(m' - m)/k$ だけ増加する

● 効用の貨幣的測度 (金額表示)

貨幣の限界効用一定

- 効用最大化条件： $MRS_{xm} = MU_x / MU_m = k \cdot MU_x = p/1 = p$
- 定数 k は、効用を金額に変換するための換算率とみてもよい

- 近似的厚生測度としての消費者余剰

消費者余剰の概念は基数的効用理論による1財の部分均衡を前提としているため、無差別曲線分析に基づく補償変分や等価変分の概念よりもさらに古典的な厚生変化の貨幣的測度であり、理論的に厳密な測度であるとはいえない。その一方で、消費者余剰の変化分は通常需要関数から計測できるという実用性を有していることから、実証分析では広く用いられている。近似の精度が所得効果の大きさに依存していることに注意する必要がある。

所得の内生化

- 時間制約

勤労者は利用可能時間を労働時間と余暇時間に配分する

$$\bar{t} \text{ (available time)} = t_w \text{ (working hours)} + t_L \text{ (leisure time)}$$

- 予算制約

賃金率を w として、所得 (I) の源泉は給与 (wt_w) のみであるとする

$$wt_w = w(\bar{t} - t_L) = I \iff wt_L + I = w\bar{t} \text{ (完全所得: full income)}$$

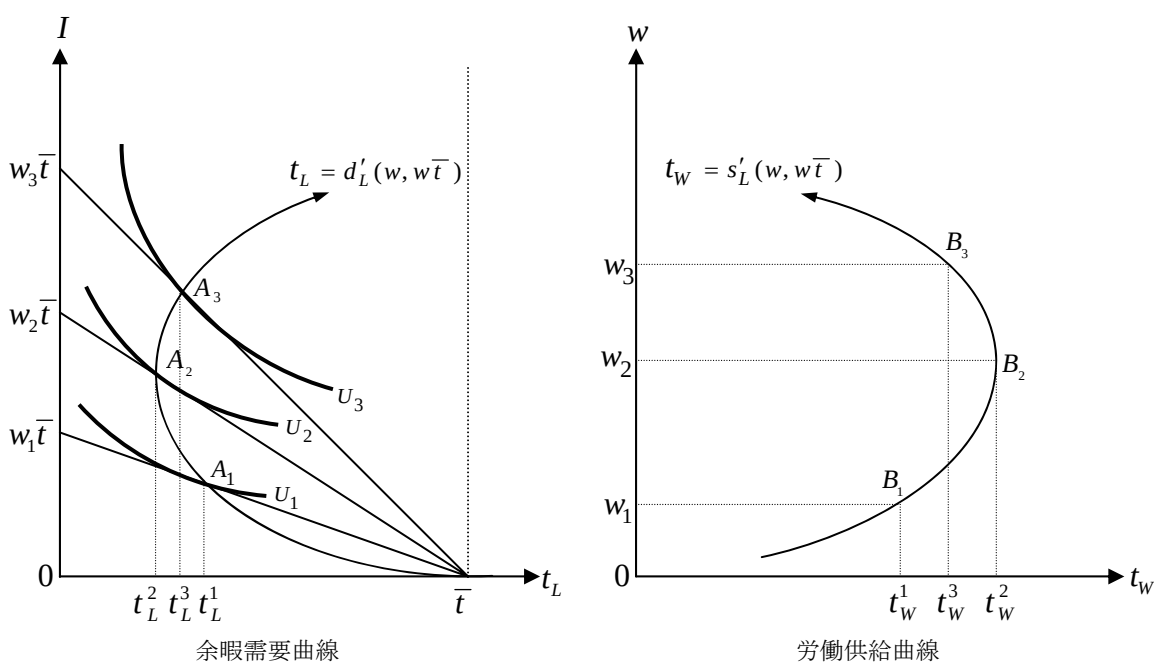
- 余暇需要曲線

$$\mathbf{p} = (w, 1), \mathbf{x} = (t_L, I) \Rightarrow B(\mathbf{p}, w\bar{t}) \equiv \{\mathbf{x} = (t_L, I) \in \mathbf{R}_+^2 \mid \mathbf{p}^t \mathbf{x} \leq w\bar{t}, t_L \geq 0, I \geq 0\} \text{ のとき,}$$

$$t_L^* = \arg \max_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{p}, w\bar{t})} U(t_L, I) = d_L(w, 1, w\bar{t}) = d'_L(w, w\bar{t})$$

- 労働供給曲線 $t_w^* = s_L(w, 1, w\bar{t}) = s'_L(w, w\bar{t}) = \bar{t} - d'_L(w, w\bar{t})$

- 所得効果と後方屈曲供給曲線 (backward bending supply curve)



大学院 ⇒ 需要の双対問題

支出関数と間接効用関数

- 支出関数 (expenditure function : $E(\mathbf{p}, \mu) = \min_{\mathbf{x}: U(\mathbf{x}) \geq \mu} \mathbf{p}^t \mathbf{x} = \mathbf{p}^t h(\mathbf{p}, \mu)$)

→ $\mathbf{p} > 0$ のもとで, $U(\mathbf{x}) \geq \mu > 0$ を満足するような最小支出を与える関数

- ①ある $\mu > 0$ のもとで, $E(\mathbf{p}, \mu)$ は $\mathbf{p} > 0$ に関して 1 次同次の凹関数

凹関数の証明: 任意の $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ に対して $\bar{\mathbf{p}} = \theta \mathbf{p}_1 + (1-\theta)\mathbf{p}_2$ ($0 < \theta < 1$) とする

$$E(\bar{\mathbf{p}}, \mu) = \bar{\mathbf{p}}^t h(\bar{\mathbf{p}}, \mu) = \theta \mathbf{p}_1^t h(\bar{\mathbf{p}}, \mu) + (1-\theta) \mathbf{p}_2^t h(\bar{\mathbf{p}}, \mu) \geq \theta \mathbf{p}_1^t h(\mathbf{p}_1, \mu) + (1-\theta) \mathbf{p}_2^t h(\mathbf{p}_2, \mu)$$

- ②ある $\mathbf{p} > 0$ のもとで, $E(\mathbf{p}, \mu)$ は $\mu > 0$ の単調増加関数
- ③ある $\mu > 0$ のもとで, $h(\mathbf{p}, \mu)$ は $\mathbf{p} > 0$ に関してゼロ次同次関数

- 間接効用関数 (indirect utility function : $V(\mathbf{p}, I) = \max_{\mathbf{x}: \mathbf{p}^t \mathbf{x} \leq I} U(\mathbf{x}) = U(d(\mathbf{p}, I))$)

→ $\mathbf{p}$ と I で決まる予算集合の変化に対して最大効用を与える関数

- ① $V(\mathbf{p}, I)$ は $\mathbf{p} > 0$ と $I > 0$ に関してゼロ次同次関数
- ②ある $I > 0$ のもとで, $V(\mathbf{p}, I)$ は $\mathbf{p} > 0$ に関して単調非増加関数
- ③ある $\mathbf{p} > 0$ のもとで, $V(\mathbf{p}, I)$ は $I > 0$ に関して単調増加関数
- ④ある $I > 0$ のもとで, $V(\mathbf{p}, I)$ は $\mathbf{p} > 0$ に関して準凸 (quasi-convex) 関数

準凸関数の証明: 任意の $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ に対して $\bar{\mathbf{p}} = \theta \mathbf{p}_1 + (1-\theta)\mathbf{p}_2$ ($0 < \theta < 1$) とする

いま, $V(\bar{\mathbf{p}}, I) > \max\{V(\mathbf{p}_1, I), V(\mathbf{p}_2, I)\}$ であれば,

$$\mathbf{p}_1^t d(\bar{\mathbf{p}}, I) > \mathbf{p}_1^t d(\mathbf{p}_1, I) = I \text{ または } \mathbf{p}_2^t d(\bar{\mathbf{p}}, I) > \mathbf{p}_2^t d(\mathbf{p}_2, I) = I \text{ でなければならない}$$

一方, $\theta\{\mathbf{p}_1^t d(\bar{\mathbf{p}}, I)\} + (1-\theta)\{\mathbf{p}_2^t d(\bar{\mathbf{p}}, I)\} = \bar{\mathbf{p}}^t d(\bar{\mathbf{p}}, I) = I > \theta I + (1-\theta)I = I$ となって

矛盾する。したがって, $V(\bar{\mathbf{p}}, I) \leq \max\{V(\mathbf{p}_1, I), V(\mathbf{p}_2, I)\}$

双対性 (duality)

$$\text{問題 A : } \max_{\mathbf{x}: \mathbf{p}^t \mathbf{x} \leq I} U(\mathbf{x}) = d(\mathbf{p}, I) \iff \text{問題 B : } \min_{\mathbf{x}: U(\mathbf{x}) \geq \mu} \mathbf{p}^t \mathbf{x} = h(\mathbf{p}, \mu)$$

このとき, 次の対応定理が恒等的に成り立つ

- $A \Rightarrow B$: $I \equiv E(\mathbf{p}, \mu) > 0$ のもとで, $d(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}, \mu)) = h(\mathbf{p}, \mu)$
- $B \Rightarrow A$: $\mu \equiv V(\mathbf{p}, I) > 0$ のもとで, $h(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, I)) = d(\mathbf{p}, I)$
- $A \Rightarrow B$ の条件 : $E(\mathbf{p}, \mu) = E(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, \mu)) = I$
- $B \Rightarrow A$ の条件 : $V(\mathbf{p}, I) = V(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}, \mu)) = \mu$

シェパードの補題

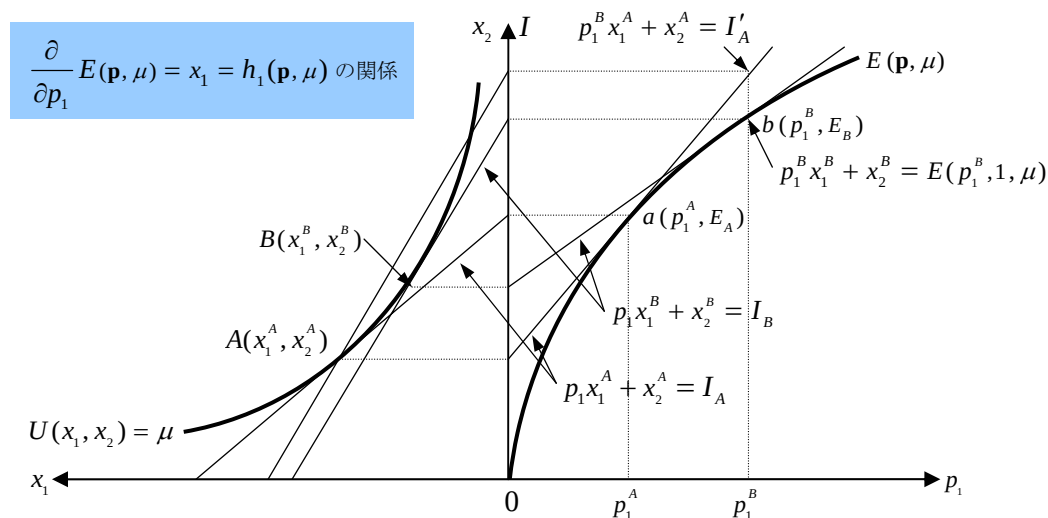
- シェパードの補題 (Shephard's lemma) : $\frac{\partial}{\partial p_i} E(\mathbf{p}, \mu) = h_i(\mathbf{p}, \mu)$

→ 支出関数 $E(\mathbf{p}, \mu)$ の p_i に関する導関数は、 x_i の補償需要関数 $h_i(\mathbf{p}, \mu)$ である

$E(\mathbf{p}, \mu)$ は $\mathbf{p} > 0$ に関して 1 次同次関数, $h(\mathbf{p}, \mu)$ は $\mathbf{p} > 0$ に関してゼロ次同次関数

→ $\mathfrak{p} > 0$ について k 次同次関数の $p_i \in \mathfrak{p}$ に関する導関数 $\Rightarrow \mathfrak{p} > 0$ に関して $(k-1)$ 次同次関数

証明：関数 $g(\mathbf{p}) \equiv E(\mathbf{p}, I) - \mathbf{p}^t h(\tilde{\mathbf{p}}, I) \leq 0$ より， $\frac{\partial g(\tilde{\mathbf{p}})}{\partial p_i} = \frac{\partial E(\tilde{\mathbf{p}}, \mu)}{\partial p_i} - h_i(\tilde{\mathbf{p}}, \mu) = 0$



- ### ● 双対関係によるスルツキー方程式の導出

次の対応定理: $d(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}, \mu)) = h(\mathbf{p}, \mu)$ より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_j} h_i(\mathbf{p}, \mu) &= \frac{\partial}{\partial p_j} d_i(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}, \mu)) + \frac{\partial}{\partial I} d_i(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}, \mu)) \frac{\partial}{\partial p_j} E(\mathbf{p}, \mu) \\ &= \frac{\partial}{\partial p_j} d_i(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}, \mu)) + h_j(\mathbf{p}, \mu) \frac{\partial}{\partial I} d_i(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}, \mu)) \quad (i, j = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

ここで $I = E(\mathbf{p}, \mu)$ とおくと,

$$\frac{\partial}{\partial p_j} d_i(\mathbf{p}, I) = \frac{\partial}{\partial p_j} h_i(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, I)) - d_j(\mathbf{p}, I) \frac{\partial}{\partial I} d_i(\mathbf{p}, I) \quad (i, j = 1, 2, \dots, m)$$

さらに，対応定理： $h(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, I)) = d(\mathbf{p}, I)$ を使って弾力性で標記すると，

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{p_j}{d_i(\mathbf{p}, I)} \frac{\partial}{\partial p_j} d_i(\mathbf{p}, I) &= \frac{p_j}{d_i(\mathbf{p}, I)} \frac{\partial}{\partial p_j} h_i(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, I)) - \frac{p_j d_j(\mathbf{p}, I)}{I} \frac{I}{d_i(\mathbf{p}, I)} \frac{\partial}{\partial I} d_i(\mathbf{p}, I) \\ &= \frac{p_j}{h_i(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, I))} \frac{\partial}{\partial p_j} h_i(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, I)) - e_j \frac{I}{d_i(\mathbf{p}, I)} \frac{\partial}{\partial I} d_i(\mathbf{p}, I) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \eta_{p_{ij}}(\mathbf{p}, I) = \eta_{p_{ii}}^C(\mathbf{p}, I) - e_j \cdot \eta_{li}(\mathbf{p}, I) \quad (i, j = 1, 2, \dots, m)$$

価格変化の効果

● 補償需要関数 $\Rightarrow$ 代替効果の対称性

$\rightarrow$ 任意の $\mathbf{p} > 0, I > 0$ に対して, 代替効果は常に対称である

$\rightarrow$ 財 j の価格変化が, 所得の補正的变化がなされたもとで財 i の需要量に与える効果は, 財 i の価格変化が, 同様の所得の補正的变化がなされたもとで財 j の需要量に与える効果に等しい $\Rightarrow$ 補償需要関数の特徴

$$\frac{\partial}{\partial p_j} h_i(\mathbf{p}, \mu) = \frac{\partial^2}{\partial p_j \partial p_i} E(\mathbf{p}, \mu) = \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} E(\mathbf{p}, \mu) = \frac{\partial}{\partial p_i} h_j(\mathbf{p}, \mu)$$

● 通常需要関数 $\Rightarrow$ 価格変化の効果は対称ではない

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_j} h_i(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, I)) &= \frac{\partial}{\partial p_j} d_i(\mathbf{p}, I) + d_j(\mathbf{p}, I) \frac{\partial}{\partial I} d_i(\mathbf{p}, I) \\ &= \frac{\partial}{\partial p_i} h_j(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, I)) = \frac{\partial}{\partial p_i} d_j(\mathbf{p}, I) + d_i(\mathbf{p}, I) \frac{\partial}{\partial I} d_j(\mathbf{p}, I) \quad (i, j = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

$\rightarrow$ 通常需要関数において価格変化の効果が対称になるのは, 以下の所得効果が対称である場合に限られる

$$d_i(\mathbf{p}, I) \frac{\partial}{\partial I} d_j(\mathbf{p}, I) = d_j(\mathbf{p}, I) \frac{\partial}{\partial I} d_i(\mathbf{p}, I) \Leftrightarrow \eta_{ij}(\mathbf{p}, I) = \eta_{ji}(\mathbf{p}, I) \quad (i, j = 1, 2, \dots, m)$$

$$\text{一方, 収支均等条件より, } \sum_{i=1}^m e_i \eta_{ii}(\mathbf{p}, I) = \sum_{i=1}^m e_i = 1$$

$\rightarrow$ 所得効果が対称となるのは $\eta_{ij}(\mathbf{p}, I) = \eta_{ji}(\mathbf{p}, I)$ かつ $\sum_{i=1}^m e_i \eta_{ii}(\mathbf{p}, I) = \sum_{i=1}^m e_i = 1$

$\rightarrow \eta_{ii}(\mathbf{p}, I) = 1 \quad (i, j = 1, 2, \dots, m)$

$\rightarrow$ 通常需要関数において価格変化の効果が対称になるのは, すべての財について需要の所得弾力性が 1 となる場合に限られる

● 通常需要関数の導出 (ロワの恒等式: Roy's identity)

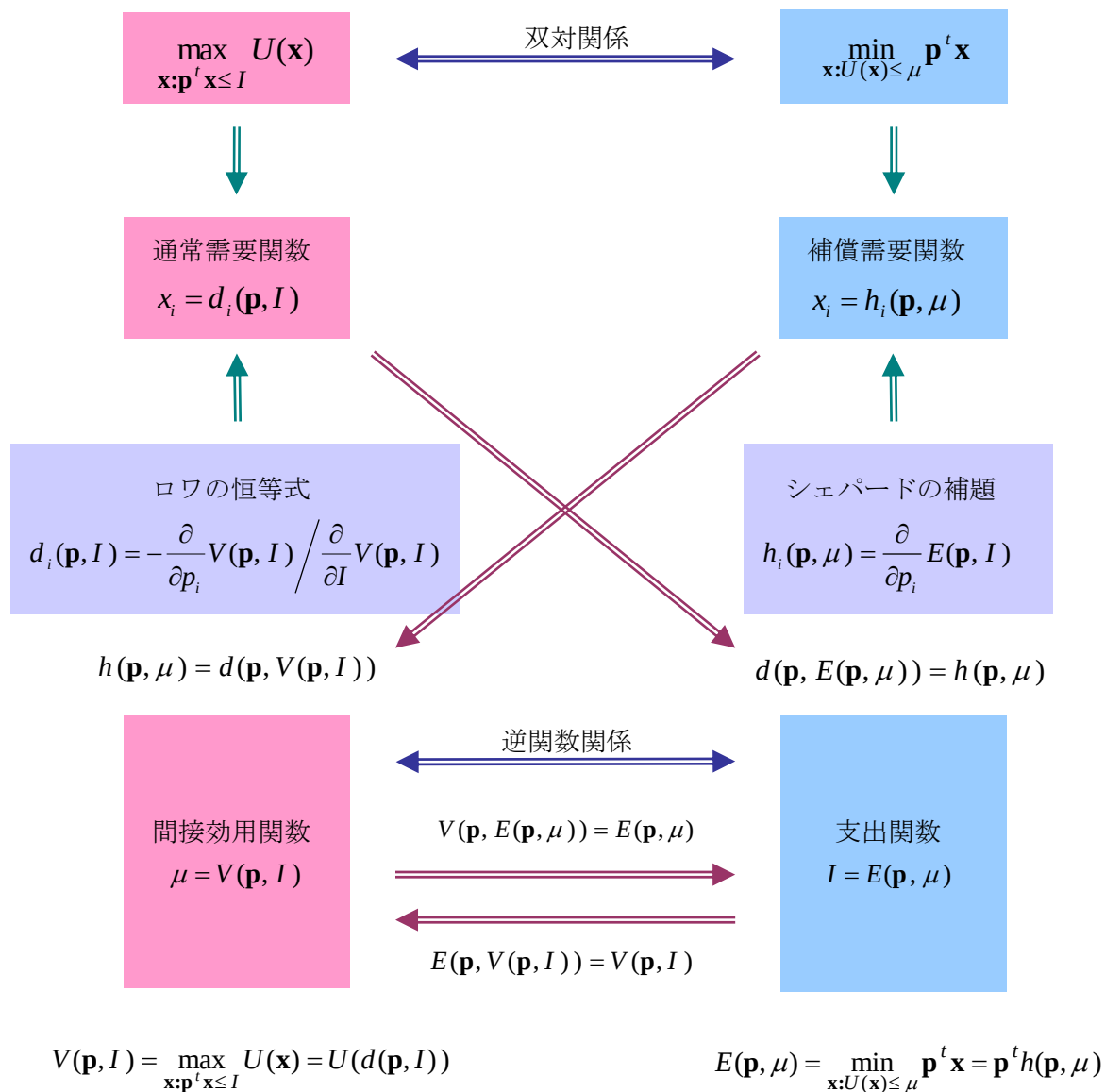
$\rightarrow$ 直接効用関数による効用最大化問題を解く代わりに, 間接効用関数の導関数の比率として通常需要関数を導出することが可能である

$$V(\mathbf{p}, I) = V(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}, \mu)) = \mu \rightarrow \frac{\partial}{\partial p_i} V(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}, \mu)) + \frac{\partial}{\partial I} V(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}, \mu)) \frac{\partial}{\partial p_i} E(\mathbf{p}, \mu) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial p_i} V(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}, \mu)) + d_i(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}, \mu)) \frac{\partial}{\partial I} V(\mathbf{p}, E(\mathbf{p}, \mu)) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$I = E(\mathbf{p}, \mu) \text{ とすると, } \Leftrightarrow d_i(\mathbf{p}, I) = - \frac{\partial}{\partial p_i} V(\mathbf{p}, I) \Big/ \frac{\partial}{\partial I} V(\mathbf{p}, I) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

関数関係のまとめ



企業行動と生産関数

- 投入-産出関係 (input-output combination)



純産出ベクトル (netput (=net output) vector) $\mathbf{z}$:

純産出量 (z_i) = 粗産出量 (y_i) - 粗投入量 (x_i) , $i = 1, \dots, n$ ($n = l + m$)

$$\mathbf{z} = (\mathbf{0} - \mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{0}) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_l, y_{l+1}, y_{l+2}, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n, \quad n = l + m$$

- 生産計画 (production plan)

企業の投入と産出の組み合わせ (技術) を生産計画という

- 生産可能集合 (production possibility set)

実行可能なすべての生産計画 (技術) の集合 : $Z = \{ \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n \mid F(\mathbf{z}) \leq 0 \}$

- 生産可能集合 Z が満たすべき性質

Z_1) フリーランチの不可能性 (impossibility of free lunch) :

$\mathbf{z} = (-x, y) \in Z$ かつ $y > 0 \Rightarrow x > 0$: 無から有を作り出すことはできない

Z_2) 閉集合 (closed set) : 生産可能集合 Z はその境界を含む

Z_3) 無償廃棄 (free disposal) 可能 : $\mathbf{z} \in Z$ かつ $\mathbf{z}' \leq \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{z}' \in Z$ (free disposability)

$\mathbf{z} = (-x, y), \mathbf{z}' = (-x', y') \in \mathbf{R}^2, \mathbf{z} \in Z$ のとき, $x' \geq x, y' \leq y$ である $\mathbf{z}' = (-x', y')$ は生産可能性集合 Z に含まれる

- 特定の場合に生産可能集合 Z が満たすべき性質

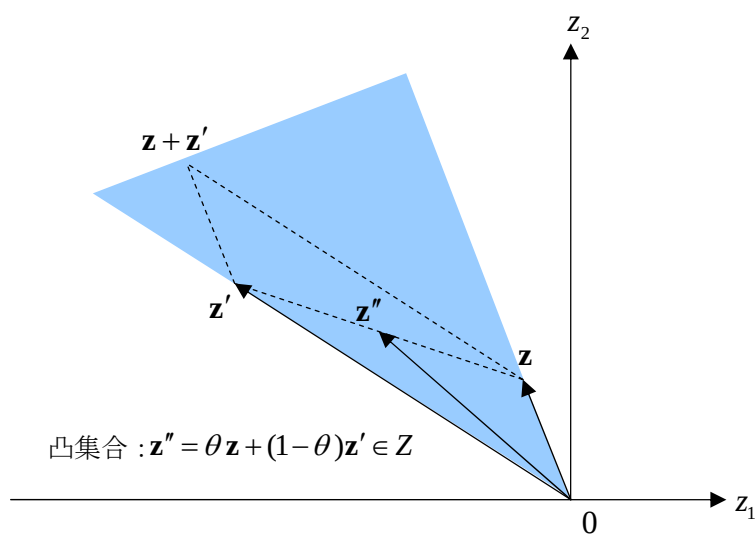
Z_4) 凸集合 (convex set) : $\mathbf{z} \in Z, \mathbf{z}' \in Z \Rightarrow \mathbf{z}'' = \theta \mathbf{z} + (1 - \theta) \mathbf{z}' \in Z, 0 < \theta < 1$

Z_5) 可分性 (divisibility) : $\mathbf{z} = (-x, y) \in Z \Rightarrow (-\theta x, \theta y) = \theta \mathbf{z} \in Z, 0 < \theta < 1$

Z_6) 加法性 (additivity) :

$\mathbf{z} = (-x, y) \in Z$ かつ $\mathbf{z}' = (-x', y') \in Z \Rightarrow \mathbf{z} + \mathbf{z}' = -(x + x'), y + y' \in Z$

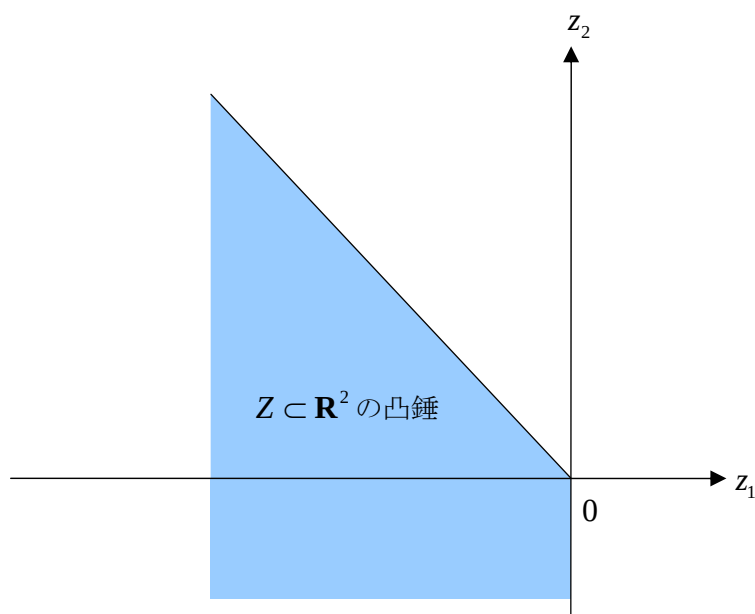
- 可分性と加法性 : $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in \mathbf{R}^2$



- 性質 Z_5 (可分性) と Z_6 (加法性) を満たせば
 $\Rightarrow$ 生産可能集合 Z は凸錐 (convex cone) である (性質 Z_4 は満たされる)
 $\Rightarrow$ 技術は「規模に関して収穫不変 (constant return to scale)」である

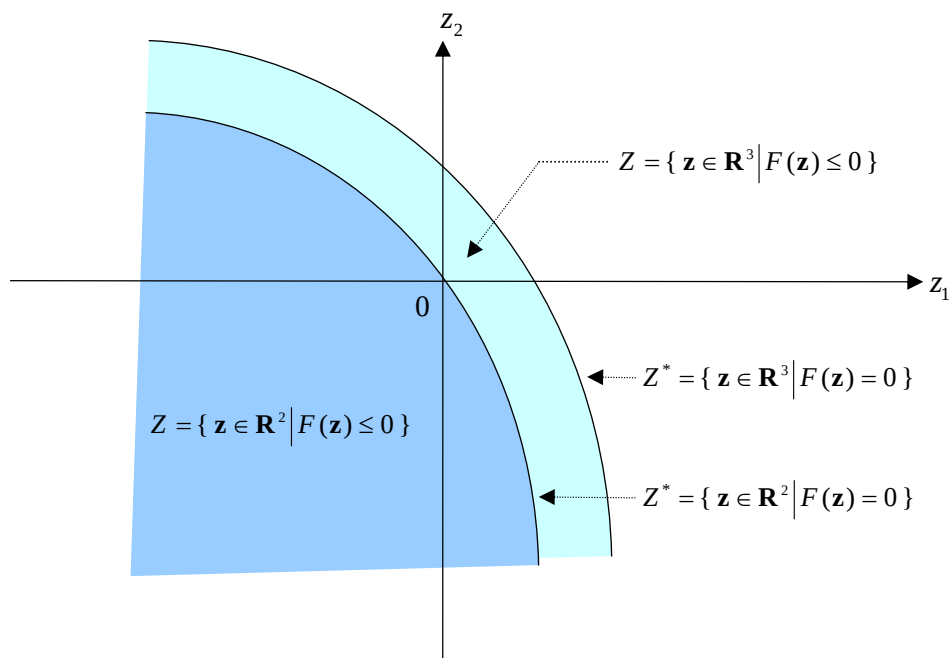
- 凸錐 (convex cone) : $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in Z \Rightarrow \alpha \mathbf{z} + \beta \mathbf{z}' = \mathbf{z}'' \in Z, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$

$$Z = \{\mathbf{z}'' \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{z}'' = \alpha \mathbf{z} + \beta \mathbf{z}', \mathbf{z}, \mathbf{z}' \in Z, \alpha \geq 0, \beta \geq 0\}$$



- 凸の生産可能集合と生産可能フロンティア（production possibility frontier）：

$$Z^* = \{ \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n \mid F(\mathbf{z}) = 0 \} = \{ \mathbf{z} \in Z \mid \mathbf{z}' > \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{z}' \notin Z \}$$



- 可能産出量集合（producible output set）

投入ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^l$ が与えられたとき， $\mathbf{x}$ で生産可能な産出ベクトル全体の集合：

$$P(\mathbf{x}) = \{ \mathbf{y} \in \mathbf{R}_+^m \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in Z \}$$

- 可能産出集合 P が満たすべき性質

P_1) 任意の $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}_+^l$ について $P(\bar{\mathbf{x}}) = \{ \mathbf{y} \in \mathbf{R}_+^m \mid F(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \leq 0 \}$ は凸集合

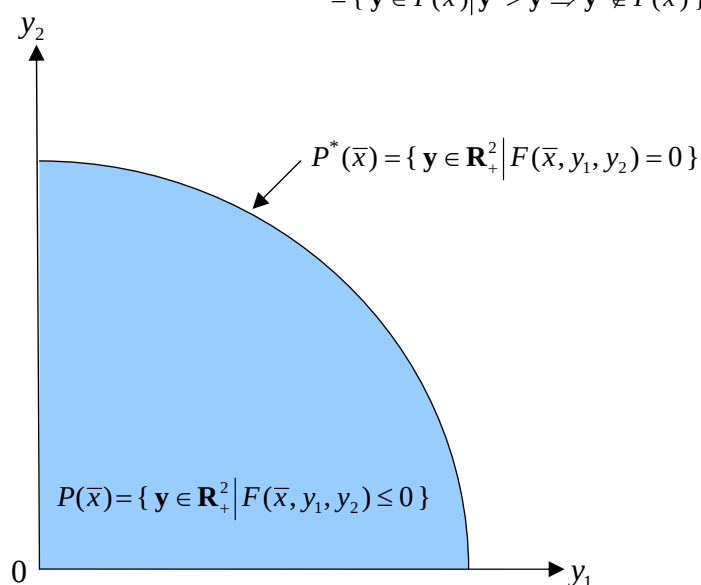
P_2) $y \in P(\mathbf{x})$ かつ $y' \leq y \Rightarrow y' \in P(\mathbf{x})$

P_3) $\mathbf{x}' \geq \mathbf{x} \Rightarrow P(\mathbf{x}') \supseteq P(\mathbf{x})$

- 生産可能集合 Z が性質 Z_5 （可分性）と Z_6 （加法性）を満たせば
 $\Rightarrow$ 可能産出集合 P は凸集合となる（性質 P_1 は満たされる）

- 生産可能集合 Z が性質 Z_4 （凸集合）を満たせば
 $\Rightarrow$ 可能産出集合 P は凸集合となる（性質 P_1 は満たされる）

- 変形曲線 (transformation curve) : $P^*(\bar{x}) = \{ \mathbf{y} \in \mathbf{R}_+^2 \mid F(\bar{x}, \mathbf{y}) = 0 \}$
 $= \{ \mathbf{y} \in P(\bar{x}) \mid \mathbf{y}' > \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{y}' \notin P(\bar{x}) \}$



- 必要投入量集合 (input requirement set)

産出ベクトル $\mathbf{y} \in \mathbf{R}_+^m$ が与えられたとき, $\mathbf{y}$ の生産に必要な投入ベクトル全体の集合:

$$V(\mathbf{y}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^l \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in Z \}$$

- 必要投入量集合 V が満たすべき性質

V_1) 任意の $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbf{R}_+^m$ について $V(\bar{\mathbf{y}}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^l \mid F(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}) \leq 0 \}$ は凸集合

V_2) $\mathbf{x} \in V(\mathbf{y})$ & $\mathbf{x}' \geq \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}' \in V(\mathbf{y})$

V_3) $\mathbf{y}' \geq \mathbf{y} \Rightarrow V(\mathbf{y}') \subseteq V(\mathbf{y})$

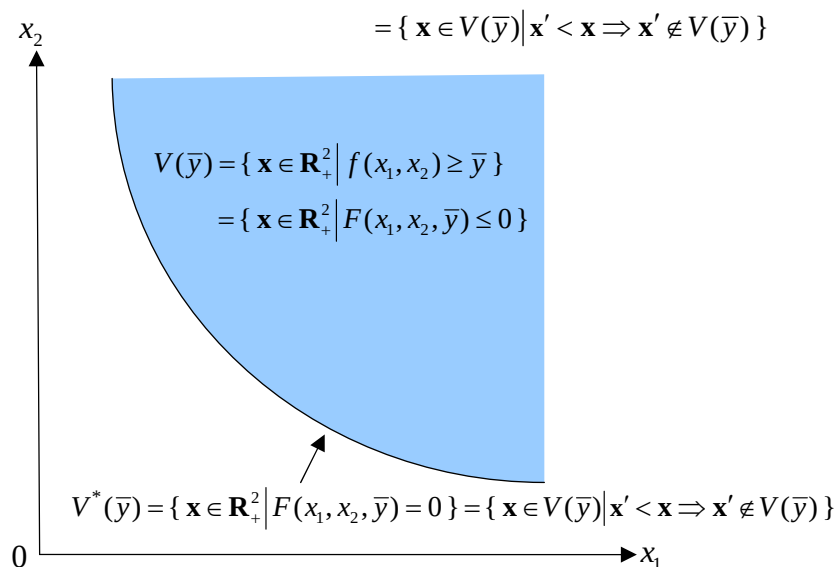
- 生産可能集合 Z が性質 Z_5 (可分性) と Z_6 (加法性) を満たせば

$\Rightarrow$ 必要投入量集合 V は凸集合となる (性質 V_1 は満たされる)

- 生産可能集合 Z が性質 Z_4 (凸集合) を満たせば

$\Rightarrow$ 必要投入量集合 V は凸集合となる (性質 V_1 は満たされる)

- 等量曲線（等産出量曲線, isoquant）： $V^*(\bar{y}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^2 \mid F(\mathbf{x}, \bar{y}) = 0 \}$

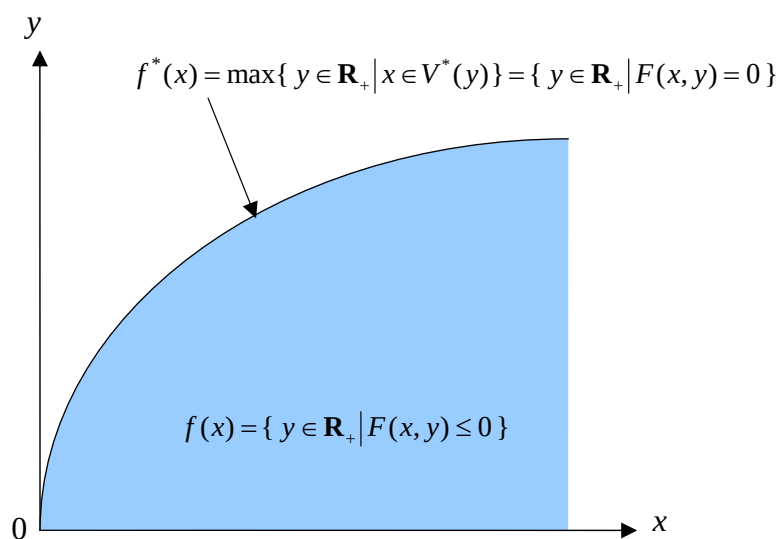


- (1 財) 生産関数 (single-output production function) :

$$V^*(y) = \{ \mathbf{x} \in V(y) \mid \mathbf{x}' < \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}' \notin V(y) \}$$

$$\Rightarrow y = f^*(\mathbf{x}) = \{ y \in \mathbf{R}_+ \mid \mathbf{x} \in V^*(y) \} \Leftrightarrow F(\mathbf{x}, y) = 0$$

- 集合 $(\mathbf{x}, f^*(\mathbf{x}))$ を効率的生産可能性集合 (efficient production possibility set) という



- 生産関数 $f^*(\mathbf{x})$ が満たすべき性質について

$$f_1) \quad f^*(\mathbf{0}) = 0$$

$$f_2) \quad f^*(\mathbf{x}) \text{ は } \mathbf{x} \text{ の単調非減少 (monotonic non-decreasing) 関数}$$

$$\mathbf{x}' \geq \mathbf{x} \Rightarrow f(\mathbf{x}') \geq f(\mathbf{x}) : \text{単調性 (monotonicity)}$$

$$f_3) \quad f^*(\mathbf{x}) \text{ は } \mathbf{x} \text{ の単調増加 (monotonic increasing) 関数}$$

$$\mathbf{x}' \gg \mathbf{x} \Rightarrow f^*(\mathbf{x}') \gg f^*(\mathbf{x}) : \text{強い意味の単調性 (strict monotonicity)}$$

$$f_4) \quad \text{準凹関数 (quasi-concave function) :}$$

$$f^*(\theta \mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{x}') \geq \min\{f^*(\mathbf{x}), f^*(\mathbf{x}')\}, \quad 0 < \theta < 1$$

$$f_5) \quad \text{強い意味の準凹関数 (strict quasi-concave function) :}$$

$$f^*(\theta \mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{x}') > \min\{f^*(\mathbf{x}), f^*(\mathbf{x}')\}, \quad 0 < \theta < 1$$

$$f_6) \quad \text{凹関数 (concave function) : } f^*(\theta \mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{x}') \geq \theta f^*(\mathbf{x}) + (1-\theta)f^*(\mathbf{x}'), \quad 0 < \theta < 1$$

$$f_7) \quad \text{強い意味の凹関数 (concave function) :}$$

$$f^*(\theta \mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{x}') > \theta f^*(\mathbf{x}) + (1-\theta)f^*(\mathbf{x}'), \quad 0 < \theta < 1$$

- 生産可能集合 Z が性質 Z_1 (フリーランチの不可能性) を満たせば

$$\Rightarrow f^*(\mathbf{0}) = 0 \quad (\text{性質 } f_1 \text{ は満たされる})$$

- 生産可能集合 Z が性質 Z_2 (無償廃棄可能) を満たせば

$$\Rightarrow f^*(\mathbf{x}) \text{ は } \mathbf{x} \text{ の単調非減少関数となる (性質 } f_2 \text{ は満たされる)}$$

- 生産可能集合 Z が性質 Z_2 (無償廃棄可能) を満たせば

$$\Rightarrow \text{限界生産物 (marginal product) は非負 : } \partial y / \partial x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, l$$

- $f^*(\mathbf{x})$ が性質 f_3 を満たせば $\Rightarrow$ 限界生産物は正 : $\partial y / \partial x_i > 0, \quad i = 1, \dots, l$

- 必要投入量集合 V が性質 V_1 (凸集合) をみたせば

$$\Rightarrow f^*(\mathbf{x}) \text{ は準凹 (性質 } f_4 \text{ は満たされる)}$$

- 生産可能集合 Z が性質 Z_5 (可分性) を満たさなければ

$$\Rightarrow f^*(\mathbf{x}) \text{ は準凹関数となる (性質 } f_4 \text{ は満たされる)}$$

- 生産可能集合 Z が性質 Z_4 (凸集合) を満たせば

$$\Rightarrow f^*(\mathbf{x}) \text{ は凹関数となる (性質 } f_6 \text{ は満たされる)}$$

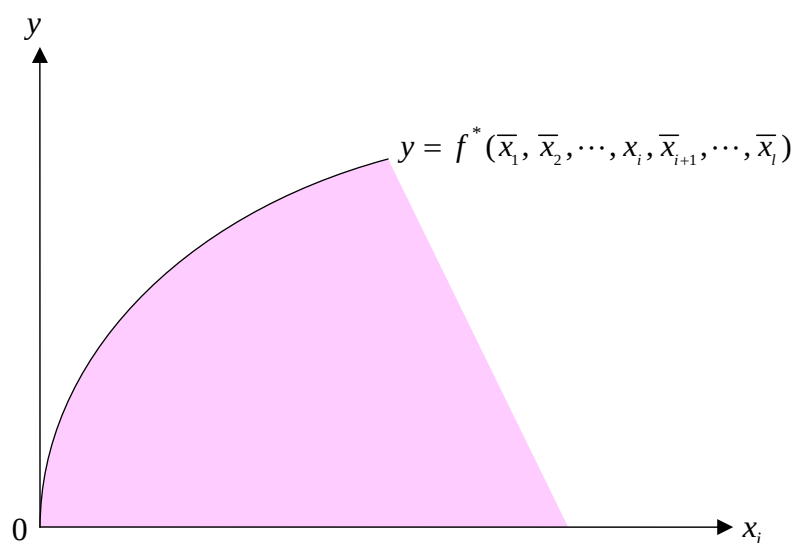
- 利潤最大化条件が満たされるためには

$$\Rightarrow \text{性質 } f_1, f_3, f_5, f_6 \text{ が満たされねばならない}$$

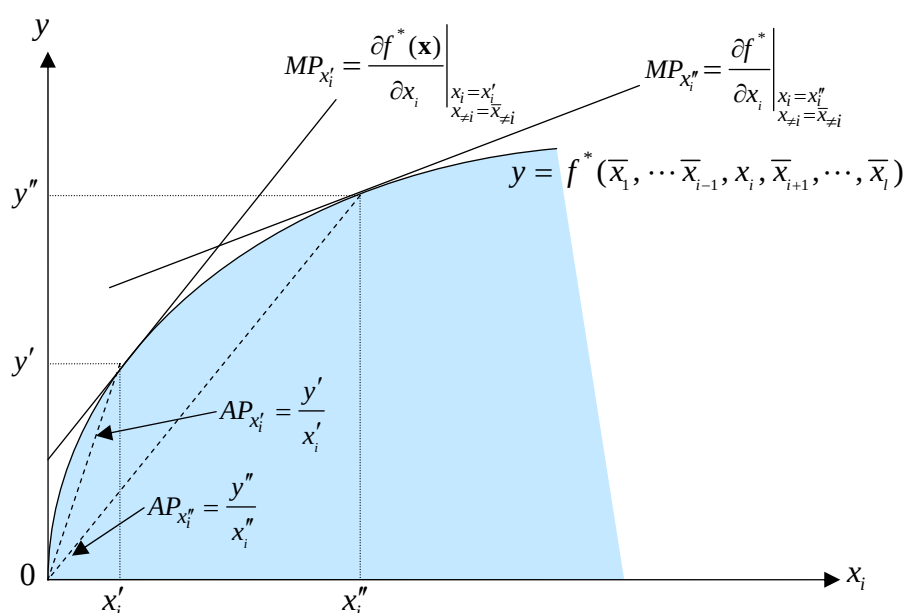
- 利潤最大化点が一意 (unique) に決まるためには

$$\Rightarrow \text{性質 } f_1, f_3, f_7 \text{ が満たされねばならない}$$

- 短期 (short-run) と長期 (long-run)
- 生産要素 (input) $\Rightarrow$ 可変生産要素 (variable input) + 固定生産要素 (fixed input)
- 固定生産要素：計画期間内に投入量を変えられない生産要素
 - ① サンクされた固定生産要素：中古市場が存在しないため、対価を取り戻すことができない固定生産要素（この状態を「費用がサンクしている、サンクコスト (sunk cost) が発生している」という）
 - ② サンクされない固定生産要素：投入量を変えられないが、中古市場で売却可能
 $\Rightarrow$ 中古市場が存在する場合、売却により投入量をゼロにすることができる
- 短期：生産量可変のもとで、計画期間内にサンクされた固定生産要素が（最低ひとつ）存在する $\Rightarrow$ 例) $y^S = f^*(\mathbf{x}) = f^*(x_1, \bar{x}_2) \in \mathbf{R}_+^3$
- 長期：生産量可変のもとで、すべての生産要素の投入量が変更可能な長さの計画期間
 $\Rightarrow$ 可変生産要素，または可変生産要素 + サンクされない固定生産要素
 $\Rightarrow$ 企業の参入と退出が可能 $\Rightarrow$ 例) $y^L = f^*(\mathbf{x}) = f^*(x_1, x_2) \in \mathbf{R}_+^3$
- 総生産物曲線 (total product curve)： $y = f^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, x_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_l) \in \mathbf{R}_+^l$
 l 個の生産要素のうち， x_i ($i=1, \dots, l$) を除く ($l-1$) 個の投入量を一定としたときの x_i と y の関係



- 限界生産物 (marginal product, 限界生産力: marginal productivity)
平均生産物 (average product, 平均生産力: average productivity)



- 限界生産物: 他の条件を一定として, ある生産要素の投入量を 1 単位追加したときに得ら

れる生産量の増加分: $MP_i = \frac{\partial f^*(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad (i=1, \dots, l)$

- 平均生産物: 他の条件を一定として, 生産量をある生産要素の投入量で割った比率

⇒ 生産関数上の生産点と原点とを結ぶ半直線の傾き:

$$AP_i = \frac{f^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_l)}{x_i} \quad (i=1, \dots, l)$$

- 限界生産物逓減の法則 (law of diminishing marginal product)

他の条件を一定として, ある生産要素の投入量を追加していくと, それによる生産量の増加分は減少していく (収穫逓減の法則: law of diminishing return) ともいう

$$x'_i < x''_i \Rightarrow \frac{\partial f^*(\mathbf{x})}{\partial x_i} \Big|_{x_i=x'_i, x_{\neq i}=\bar{x}_{\neq i}} > \frac{\partial f^*(\mathbf{x})}{\partial x_i} \Big|_{x_i=x''_i, x_{\neq i}=\bar{x}_{\neq i}} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f^*(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) \Big|_{x_{\neq i}=\bar{x}_{\neq i}} \leq 0$$

$$1) \ f^*(\mathbf{x}) \text{ が凹関数かつ強い意味の準凹関数のとき} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f^*(\mathbf{x}) \leq 0$$

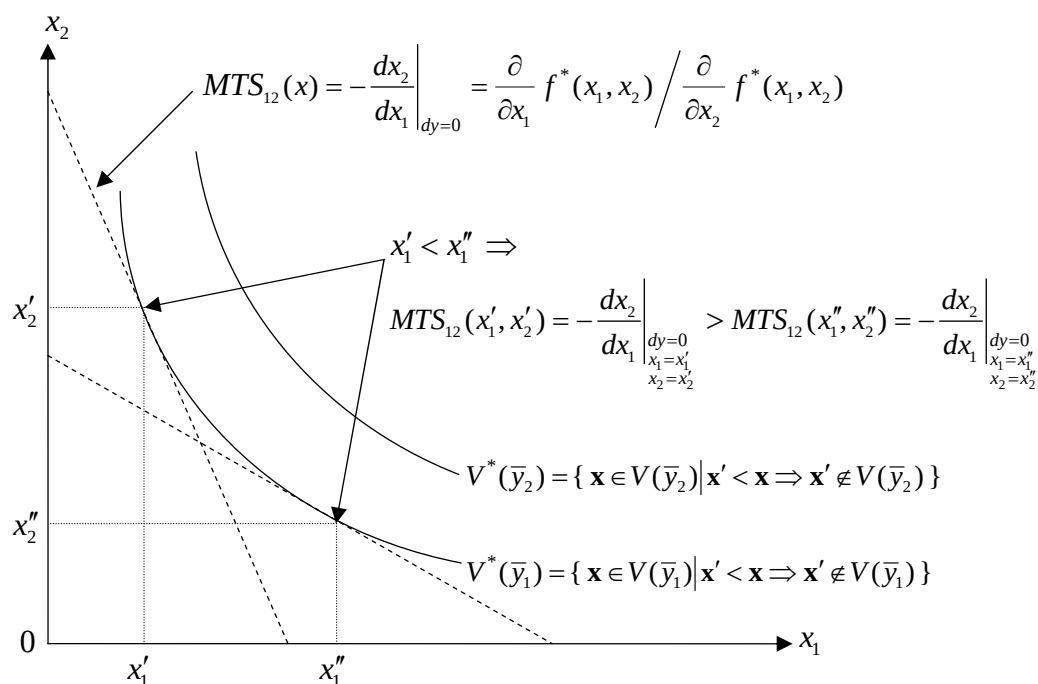
$$2) \ f^*(\mathbf{x}) \text{ が強い意味の凹関数のとき} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f^*(\mathbf{x}) < 0$$

● 限界生産物曲線と平均生産物曲線

$$\left. \begin{aligned} x_i < x_i'' &\Rightarrow MP_i > AP_i \\ x_i = x_i'' &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f^*(\mathbf{x})}{x_i} \right) = \frac{1}{x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f^*(\mathbf{x}) - \frac{f^*(\mathbf{x})}{x_i} \right) = \frac{1}{x_i} (MP_i - AP_i) = 0 \Leftrightarrow MP_i = AP_i \\ x_i > x_i'' &\Rightarrow MP_i < AP_i \end{aligned} \right\}$$

⇒ 限界生産物曲線は平均生産物曲線の最大点を左上から右下に切る

● 等量曲線 ($\bar{y}_1 < \bar{y}_2$, $y = f(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}_+^3$) と技術的限界代替率 (MTS)



● 等量曲線 (等産出量曲線, isoquant)

ある量の生産物 ($\bar{y}$) を生産するのに必要な生産要素 ($\mathbf{x}$) の組み合わせ (必要投入量集合: $V(\bar{y})$) のうち効率的な投入ベクトルの集合: $V^*(\bar{y}) = \{ \mathbf{x} \in V(\bar{y}) \mid \mathbf{x}' < \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}' \notin V(\bar{y}) \}$

⇒ 消費者需要理論の無差別曲線に対応

- 技術的限界代替率 (marginal rate of technical substitution : MTS)

$$dy|_{dx_{h \neq i, j}=0} = \frac{\partial f^*(\mathbf{x})}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f^*(\mathbf{x})}{\partial x_j} dx_j = 0 \Leftrightarrow -\frac{dx_j}{dx_i} \Big|_{dy=0, dx_{h \neq i, j}=0} = \frac{\partial f^*(\mathbf{x})/\partial x_i}{\partial f^*(\mathbf{x})/\partial x_j} = MTS_{ij}(\mathbf{x})$$

等量曲線上のある一点 $\mathbf{x}$ における等量曲線の接線の傾きの絶対値

現在の投入量の組み合わせから、生産量を変えずに第 i 生産要素を増加させたとき、増加 1 単位あたり減少させることができる第 j 生産要素の単位数

$\Rightarrow$ 消費者需要理論の限界代替率に対応

- 技術的限界代替率逓減の法則 (law of diminishing marginal rate of technical substitution)

等量曲線上では、 x_i の投入量が増加するにつれて技術的限界代替率 MTS_{ij} は逓減する

$\Rightarrow x_i$ の投入量が増加するにつれて、 x_i の追加によって節約できる x_j の投入量は減少する

$\Rightarrow$ 等量曲線は原点に対して凸な右下がりの曲線である $\Leftrightarrow \frac{d}{dx_i}(MTS_{ij}) < 0$

$\Rightarrow$ 消費者需要理論の「限界代替率逓減の法則」に対応

大学院 $\Rightarrow MTS$ が逓減するための条件

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_i} MTS_{ij} &= \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial f^*(\mathbf{x})/\partial x_i}{\partial f^*(\mathbf{x})/\partial x_j} \right) = \frac{d}{dx_i} \left(\frac{f_i^*}{f_j^*} \right) \\ &= (f_j^*)^{-2} \left[f_j^* (f_{ii}^* - f_{ij}^* f_i^* / f_j^*) - f_i^* (f_{ji}^* - f_{jj}^* f_i^* / f_j^*) \right] \\ &= (f_j^*)^{-3} \left[f_{ii}^* (f_j^*)^2 - 2 f_i^* f_j^* f_{ij}^* + f_{jj}^* (f_i^*)^2 \right] \\ &= -\frac{1}{(f_j^*)^3} \mathbf{H} < 0, \quad f_h^* = \frac{\partial f^*(\mathbf{x})}{\partial x_h}, \quad f_{kh}^* = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f^*(\mathbf{x})}{\partial x_h} \right), \quad h, k = i, j \end{aligned}$$

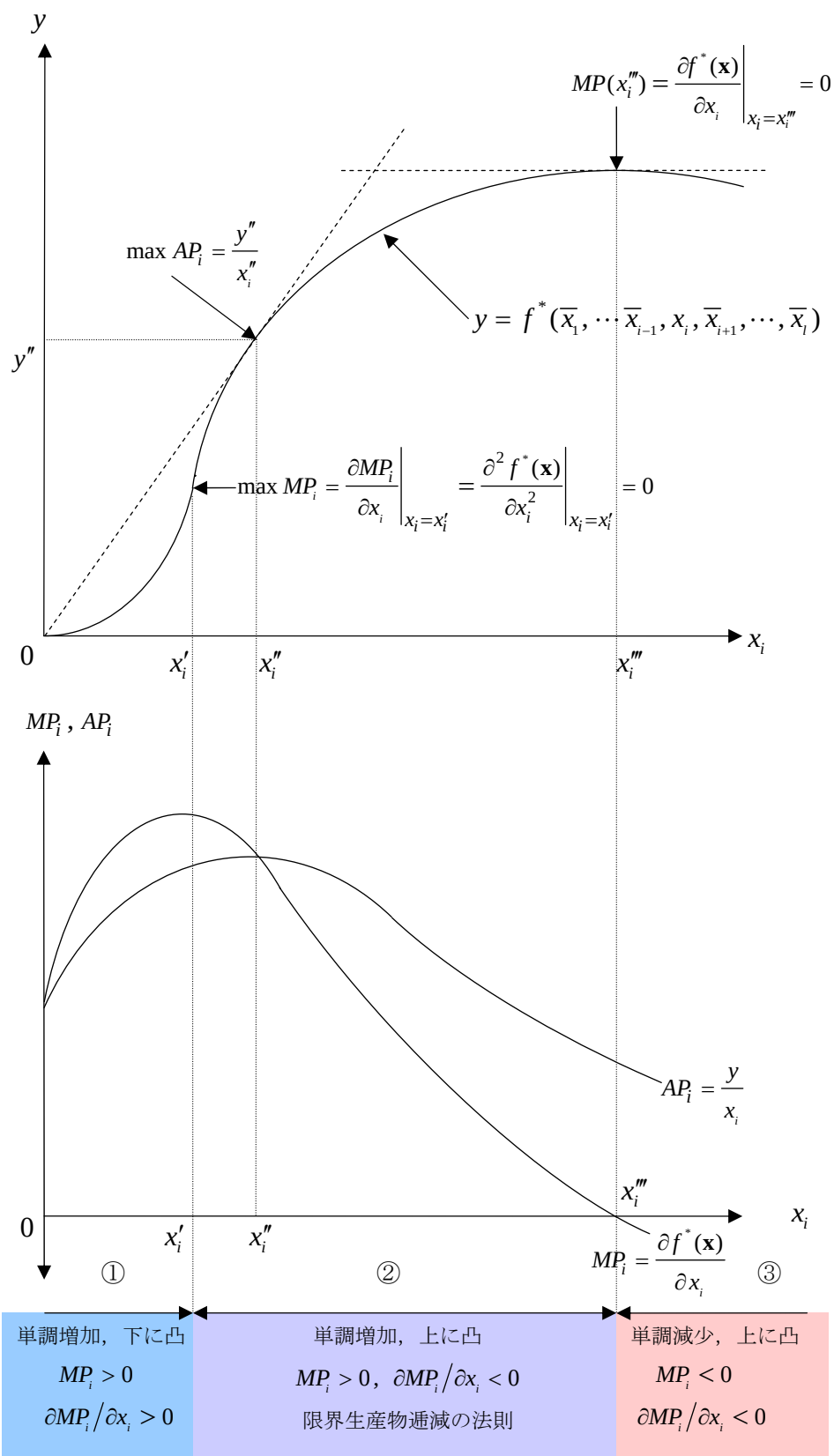
$$\Leftrightarrow \mathbf{H} = \begin{vmatrix} 0 & f_i^* & f_j^* \\ f_i^* & f_{ii}^* & f_{ij}^* \\ f_j^* & f_{ji}^* & f_{jj}^* \end{vmatrix} > 0, \quad \mathbf{H} : \text{縁つきヘッセ行列式 (bordered Hessian)}$$

$\Rightarrow \mathbf{H} > 0 \Leftrightarrow$ 技術的限界代替率 MTS_{ij} が逓減するための条件

$\Leftrightarrow$ 等量曲線 $V^*(\bar{y})$ が下に凸であるための条件

$\Leftrightarrow f^*(\mathbf{x})$ が強い意味での準凹関数であることとの関係を調べよう

● S 字型生産関数



- S 字型生産関数の意味

⇒ 性質 Z_5 (可分性: $p.1$) を満たさない技術

- ① $0 \leq x_i < x'_i : \partial MP_i / \partial x_i > 0$
- ② $x'_i < x_i < x'''_i : \partial MP_i / \partial x_i < 0, MP_i > 0$
- ③ $x'''_i < x_i : \partial MP_i / \partial x_i < 0, MP_i < 0$

- S 字型短期生産関数の意味

例) 固定生産要素: 広大な農地 ($\bar{x}_{j \neq i}$), 可変生産要素: 労働 (x_i)

短期の生産関数では, 固定生産要素投入量に対して可変生産要素の投入量が小さい領域で限界生産力が逓増する ($0 \leq x_i < x'_i$) ⇒ 可変生産要素の投入量が増加するにしたがつて限界生産力は逓減する ($x'_i < x_i < x'''_i$) ⇒ S 字型

⇒ ある生産要素投入量が固定されているために技術の可分性が満たされない

- S 字型長期生産関数の意味

例) 大型プラントが効率的な鉄鋼業, 電力事業, 石油化学工業など

⇒ 生産量 (⇒ 可変生産要素投入量) が小さい領域では, S 字型短期生産関数と同様に技術の可分性が満たされない

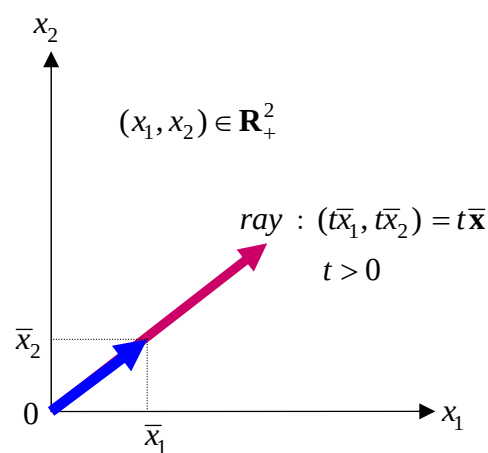
⇒ 不可分な技術 ⇒ 可分性が満たされるほどの規模が必要

⇒ 規模の経済 (economies of scale)

- 規模に関する収穫 (return to scale) ⇒

長期生産関数上で定義 (すべて可変生産要素)
生産関数による定義は次のとおり

⇒ 例えば $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}_+^2$ のとき, 生産要素投入比率 (x_2/x_1) を任意の値に固定した半直線線 (ray) 上の生産量変化で規模に関する収穫をみる



① $0 < f^*(tx_1, tx_2) < tf^*(x_1, x_2)$, $t > 1$ のとき
 $\Rightarrow$ 規模に関して収穫逓減 (diminishing return to scale)

② $0 < tf^*(x_1, x_2) < f^*(tx_1, tx_2)$, $t > 1$ のとき
 $\Rightarrow$ 規模に関して収穫逓増 (increasing return to scale)

③ $0 < f^*(tx_1, tx_2) = tf^*(x_1, x_2)$, $t > 0$
 $\Rightarrow$ 規模に関して収穫一定 (constant return to scale)

● 同次関数と規模に関する収穫

$y = f^*(\mathbf{x})$ が k 次同次関数 $\Rightarrow f^*(n\mathbf{x}) = n^k f^*(\mathbf{x})$ (n は正の定数) のとき

① $0 < k < 1 \Rightarrow$ 規模に関して収穫逓減
 $\Rightarrow$ S 字型生産関数では②の領域: $MP_i > 0$, $\partial MP_i / \partial x_i < 0$

② $k = 1 \Rightarrow$ 規模に関して収穫一定 (constant return to scale)
 $\Rightarrow$ $MP_i > 0$, $\partial MP_i / \partial x_i = 0$

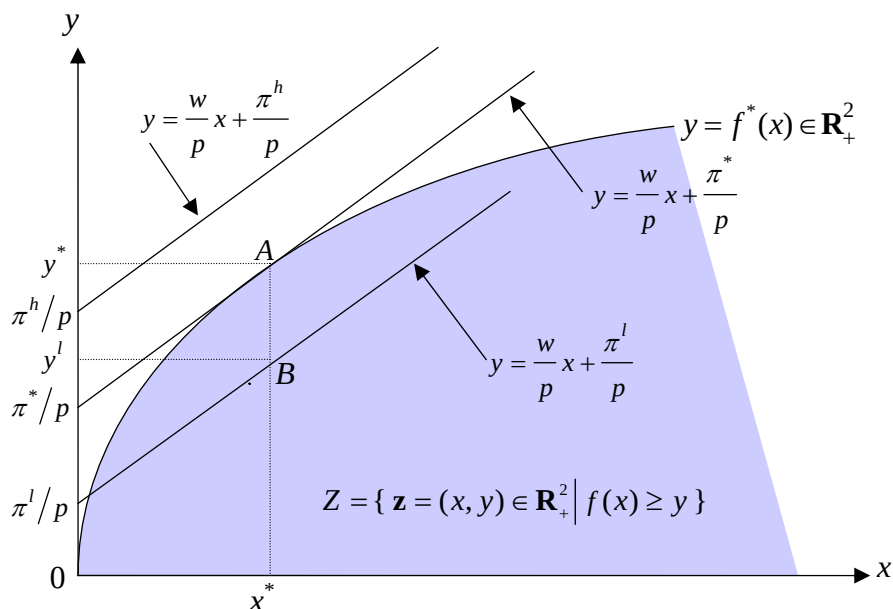
③ $k > 1 \Rightarrow$ 規模に関して収穫逓増 (increasing return to scale)
 $\Rightarrow$ S 字型生産関数では①の領域: $MP_i > 0$, $\partial MP_i / \partial x_i > 0$

● 短期的反応と長期的反応の区別

他の生産要素を固定して、1つの生産要素について投入量を追加していくと、それによる生産量の増加分は減少していく場合、限界生産物逓減の法則 (law of diminishing marginal product) が成りたっていた (短期的反応)。一方、規模に関する収穫 (return to scale) は長期的反応を表し、すべての生産要素が一定比率で増加した場合の、生産要素と生産量の増加分の関係を記述する。したがって、生産関数の形状が規模に関して収穫逓増であっても、限界生産物逓減の法則にしたがう場合がある: 例) $y = f(x_1, x_2) = x_1^{2/3} x_2^{2/3}$

利潤最大化

● 利潤最大化

● $y = f^*(x) \in \mathbf{R}_+^2$ の利潤最大化問題

$$\pi^* = \max_{(x,y) \in Z} \pi = \max_{(x,y): f^*(x)=y} \pi = \max_{(x,y): f^*(x)=y} py - wx$$

π : 利潤 (profit), p : 生産物価格, w : 生産要素価格

● 等利潤曲線 (iso-profit curve)

ある利潤 ($\bar{\pi}$) をもたらすすべての生産計画 (x, y) : $py - wx = \bar{\pi}$

$$\Rightarrow A(x^*, y^*) : py^* - wx^* = \pi^* > py^l - wx^* = \pi^l : B(x^*, y^l)$$

$\Rightarrow$ 生産関数と等利潤曲線の接点で最大利潤をもたらす生産計画 (x^*, y^*) が与えられる

● 制約付き最大化問題としての利潤最大化

$A(x^*, y^*)$ で与えられる利潤最大化問題の解は、生産可能集合 Z に含まれる生産計画 (x, y) から利潤が最大となる点を見つけることにほかならない

$\Rightarrow$ その場合、 $A(x^*, y^*)$ は生産可能集合 Z の部分集合として効率的な生産計画の集合である
効率的生産可能集合 $(\mathbf{x}, f^*(\mathbf{x}))$ にも含まれるはずである

$\Rightarrow$ このとき解の選べる領域 (domain) をあらかじめ限定する生産可能集合 Z や効率的生産可能集合 $(\mathbf{x}, f^*(\mathbf{x}))$ を制約条件とよぶ

- 制約付き最適化問題の解法 $\Rightarrow$ ラグランジュの未定乗数法 (Lagrange multiplier method)
 次のように目的関数 (Lagrange function) を設定して, (あたかも制約条件なしのように) この目的関数について最適点を求める

$$\begin{aligned} \text{目的関数} &= \text{最大化するもの} + \lambda_1 (\text{制約条件 1}) + \lambda_2 (\text{制約条件 2}) + \cdots \\ &= \text{最大化するもの} + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\text{制約条件}_i) \end{aligned}$$

λ_i : ラグランジュ乗数, 制約条件は陰関数表記

例) 利潤最大化問題

$$\pi^* = \max_{(x,y) \in Z} \pi = \max_{(x,y): f^*(x)=y} \pi = \max_{(x,y): f^*(x)=y} (py - wx) = py^* - wx^* \text{ において,}$$

$$L(x, y, \lambda) = py - wx + \lambda \{ f^*(x) - y \}$$

最大化するもの: $py - wx$, 制約条件: $f^*(x) - y$

制約条件 $\Rightarrow$ 陽関数 (explicit function) 表記: $y = f^*(x)$

陰関数 (implicit function) 表記: $f^*(x) - y = 0$

このとき最適解 (x^*, y^*, λ^*) は以下の 1 階の条件を満たさなければならない

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} L(x^*, y^*, \lambda^*) = -w + \lambda^* \frac{d}{dx} f^*(x^*) = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} L(x^*, y^*, \lambda^*) = p - \lambda^* = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \lambda} L(x^*, y^*, \lambda^*) = f^*(x^*) - y^* = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \lambda^* = p$$

$$(1) \Rightarrow p \frac{d}{dx} f^*(x^*) = w \Leftrightarrow \frac{d}{dx} f^*(x^*) = \frac{w}{p}$$

$$\text{これより利潤最大化の条件は} \Rightarrow \frac{d}{dx} f^*(x^*) = \frac{w}{p}$$

$$\Rightarrow A(x^*, y^*) \text{ において生産関数の傾き } \frac{d}{dx} f^*(x^*) \text{ と等利潤曲線の傾き } \frac{w}{p} \text{ は等しい}$$

$\Rightarrow$ 生産関数と等利潤曲線の接点で最大利潤をもたらす生産計画 (x^*, y^*) が与えられる

● ラグランジュの未定乗数法の直観的理解

$$L(x, y, \lambda) = py - wx + \lambda(f^*(x) - y) = h(x, y) + \lambda g(x, y) \text{ とおくと,}$$

$$dL(x, y, \lambda) = (-w, p) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{df^*(x)}{dx}, -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \nabla h \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} + \lambda \nabla g \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$A(x^*, y^*)$ で $h(x, y)$ と $g(x, y)$ の勾配ベクトル $\nabla h, \nabla g$ は 1 次従属となる

$\Leftarrow$ ($\nabla h, \nabla g$ は共通の ${}^t(dx, dy)$ に対して直交していなければならないので)

$\Rightarrow$ λ が任意のスカラーのとき, $\nabla h = \lambda \nabla g$ とおくことができる

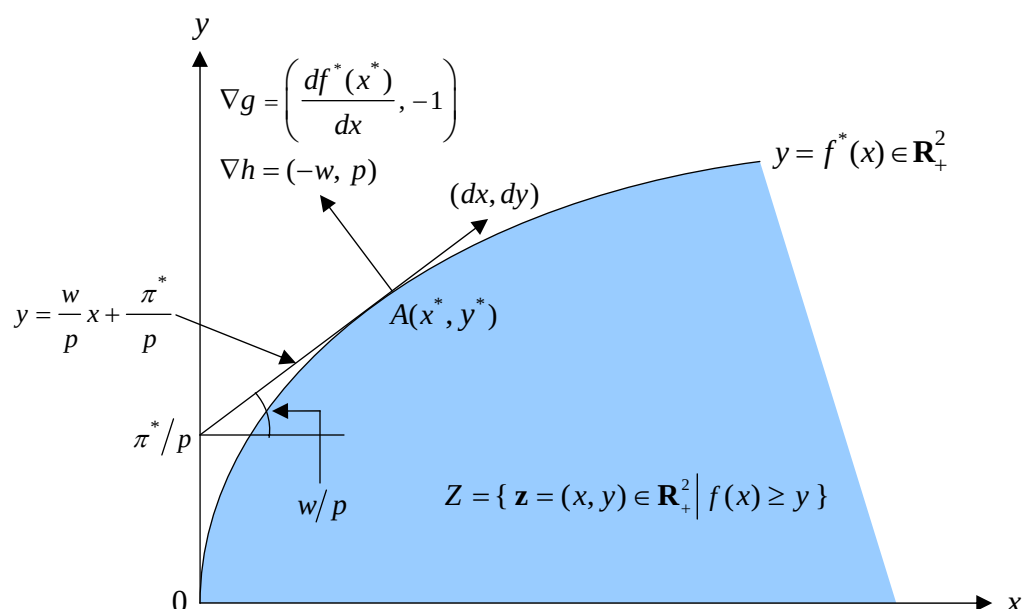
$$\Leftrightarrow (-w, p) = \lambda \begin{pmatrix} \frac{df^*(x^*)}{dx}, -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -w = \lambda \frac{df^*(x^*)}{dx} \\ p = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d}{dx} f^*(x^*) = \frac{w}{p}$$

● ベクトルの 1 次従属 (linear dependence)

m 個のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ について $a_1 \mathbf{a}_1 + a_2 \mathbf{a}_2 + \dots + a_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}$ のとき, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ は 1 次従属であるという。ただし, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ は少なくとも 1 つはゼロではない任意のスカラーを表す。

$\nabla h = \lambda \nabla g \Rightarrow a_1 = -1, a_2 = \lambda$ のとき, $a_1 \nabla h + a_2 \nabla g = \mathbf{0} \Rightarrow \nabla h, \nabla g$ は 1 次従属



●利潤最大化の条件

生産関数と等利潤曲線の接点として与えられる利潤最大化の点では、すべての生産要素について限界生産物（MP）と投入・産出価格比率（生産要素価格/生産物価格）が等しい

$$\Rightarrow \frac{d}{dx_i} f^*(\mathbf{x}) = mp_i(\mathbf{x}) = \frac{w_i}{p} \quad (i=1, \dots, l) \quad , \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^l$$

また、限界生産物に生産物価格を乗じた値は、生産要素を1単位追加したときの生産物価値額の増加分（あるいは生産要素を1単位追加したときの追加収入）を表し、限界価値生産物（marginal value product）という。利潤最大化の点では、すべての生産要素について限界価値生産物と生産要素価格が等しい

$$\Rightarrow p \frac{d}{dx_i} f^*(\mathbf{x}) = p \cdot mp_i(\mathbf{x}) = w_i \quad (i=1, \dots, l) \quad , \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^l$$

●利潤最大化条件の意味

$$p \cdot mp_i(\mathbf{x}) = w_i \quad \forall i \quad (i=1, \dots, l) \quad , \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^l$$

左辺：限界価値生産物（生産物価格×限界生産物）

= 生産要素を1単位追加したときの追加収入（生産物価格×生産量の増加分）

右辺：生産要素価格＝生産要素を1単位追加したときの追加費用

⇒ 最大化の条件：追加収入＝追加費用

⇒ 追加利潤（ $d\pi = p \cdot mp_i(\mathbf{x}) - w_i = 0$ ）がゼロとなるとときに利潤は最大化する
例)

a) $p \cdot mp_1(\mathbf{x}) > w_1$ のとき $\Rightarrow x_1$ の投入量を1単位増加したときの利潤の増加分は

$$d\pi = p \cdot mp_1(\mathbf{x}) - w_1 > 0 \Rightarrow x_1 \text{ を増加させると利潤は増加する}$$

⇒ 利潤はまだ最大化されていない

b) $p \cdot mp_1(\mathbf{x}) < w_1$ のとき $\Rightarrow x_1$ の投入量を1単位減らしたときの利潤の増加分は

$$d\pi = w_1 - p \cdot mp_1(\mathbf{x}) > 0 \Rightarrow x_1 \text{ を減少させると利潤は増加する}$$

⇒ 利潤はまだ最大化されていない

- 短期の利潤最大化

- 短期生産関数： $y = f^*(x_1, \bar{x}_2) \in \mathbf{R}_+^3$

$$\text{等利潤曲線： } \pi = (py - w_1x_1) - w_2\bar{x}_2 \iff y = \frac{w_1}{p}x_1 + \frac{\pi + w_2\bar{x}_2}{p}$$

$$\Rightarrow \text{短期利潤最大化条件： } \frac{w_1}{p} = mp_1(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} f^*(x_1, \bar{x}_2)$$

- 生産物の供給

等利潤曲線の y 軸切片による場合分け

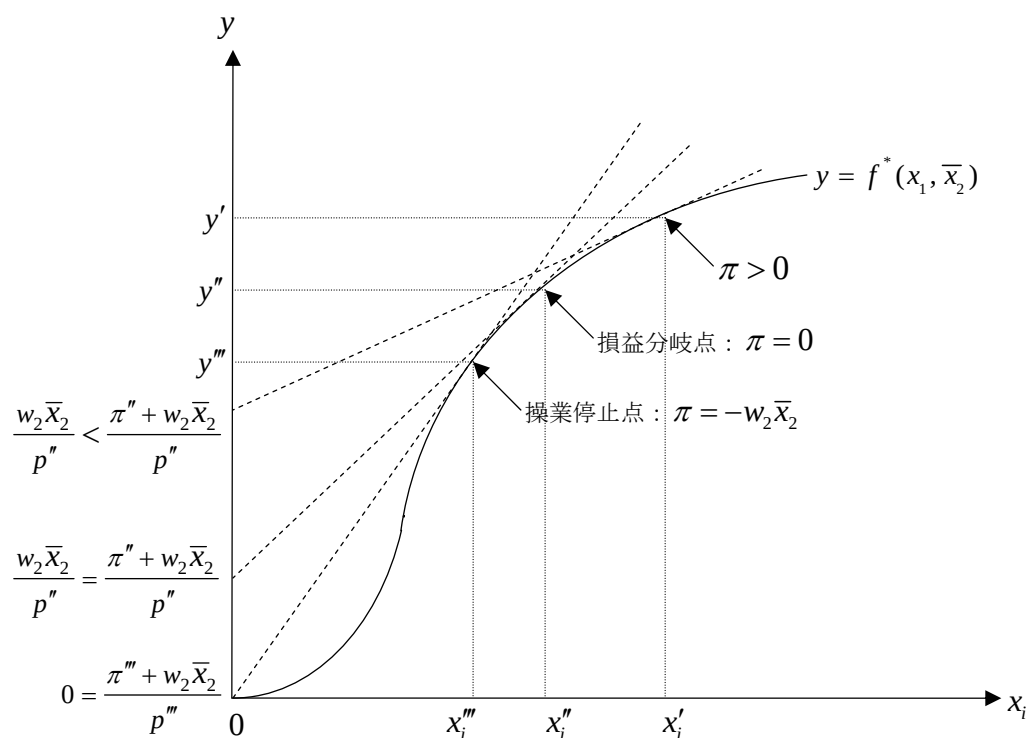
$$\textcircled{1} \frac{\pi + w_2\bar{x}_2}{p} > \frac{w_2\bar{x}_2}{p} \iff \pi > 0 \Rightarrow y > 0$$

$$\textcircled{2} \frac{w_2\bar{x}_2}{p} \geq \frac{\pi + w_2\bar{x}_2}{p} > 0 \iff 0 \geq \pi > -w_2\bar{x}_2 \Rightarrow y > 0$$

$$\frac{w_2\bar{x}_2}{p} = \frac{\pi + w_2\bar{x}_2}{p} \iff \pi = 0 : \text{損益分岐点 (break-even point)}$$

$$\textcircled{3} \frac{\pi + w_2\bar{x}_2}{p} \leq 0 \iff \pi \leq -w_2\bar{x}_2 \Rightarrow y = 0$$

$$\frac{\pi + w_2\bar{x}_2}{p} = 0 \iff \pi = -w_2\bar{x}_2 : \text{操業停止点 (shutdown point)}$$

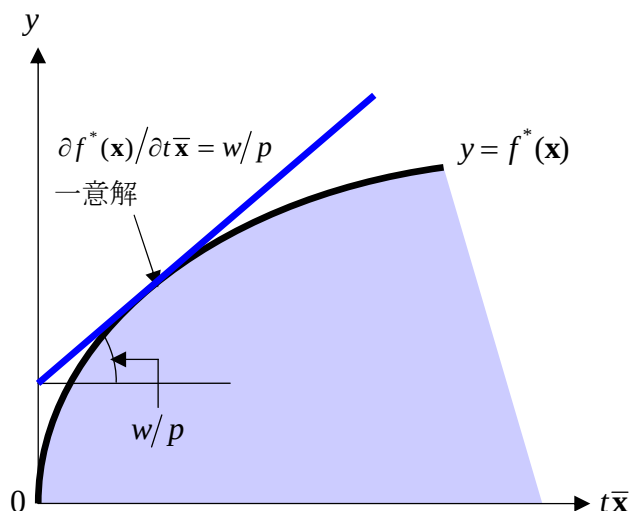


●規模に関する収穫と長期利潤最大化条件

●長期利潤最大化条件

⇒ 解は生産関数と等利潤平面との接点で与えられる

⇒ 接点を持たない場合、長期利潤最大化の均衡点は一意 (unique) には決まらない



(1) 規模に関して収穫逓減

⇒ 一意解 ($mp = w/p$)

(2) 規模に関して収穫一定 ⇒ 一意解なし

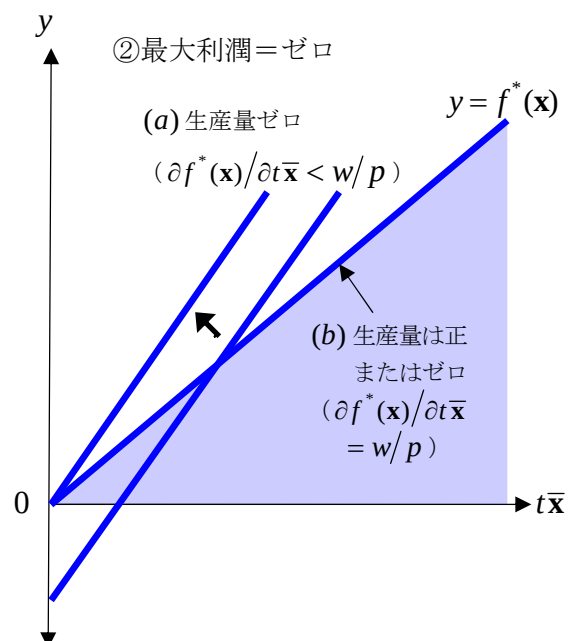
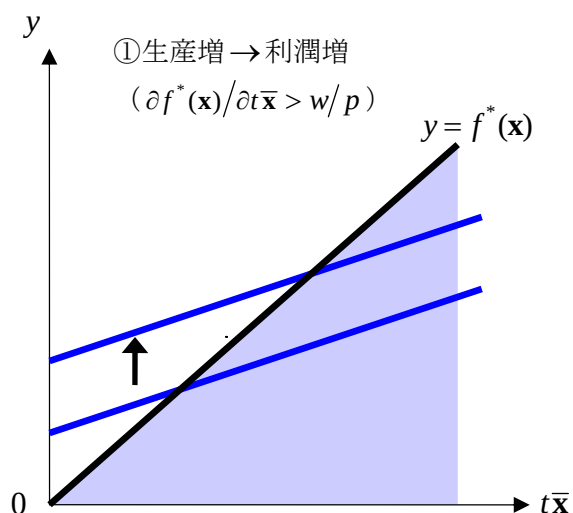
⇒ 生産要素と生産物の価格比率によって

① $\partial f^*(x)/\partial t\bar{x} > w/p$ のとき：生産増 → 利潤増

② $\partial f^*(x)/\partial t\bar{x} \leq w/p$ のとき：最大利潤＝ゼロ

⇒ このとき (a) 生産量はゼロ ($\partial f^*(x)/\partial t\bar{x} < w/p$)

(b) 生産量はゼロまたは任意の正值 ($\partial f^*(x)/\partial t\bar{x} = w/p$)

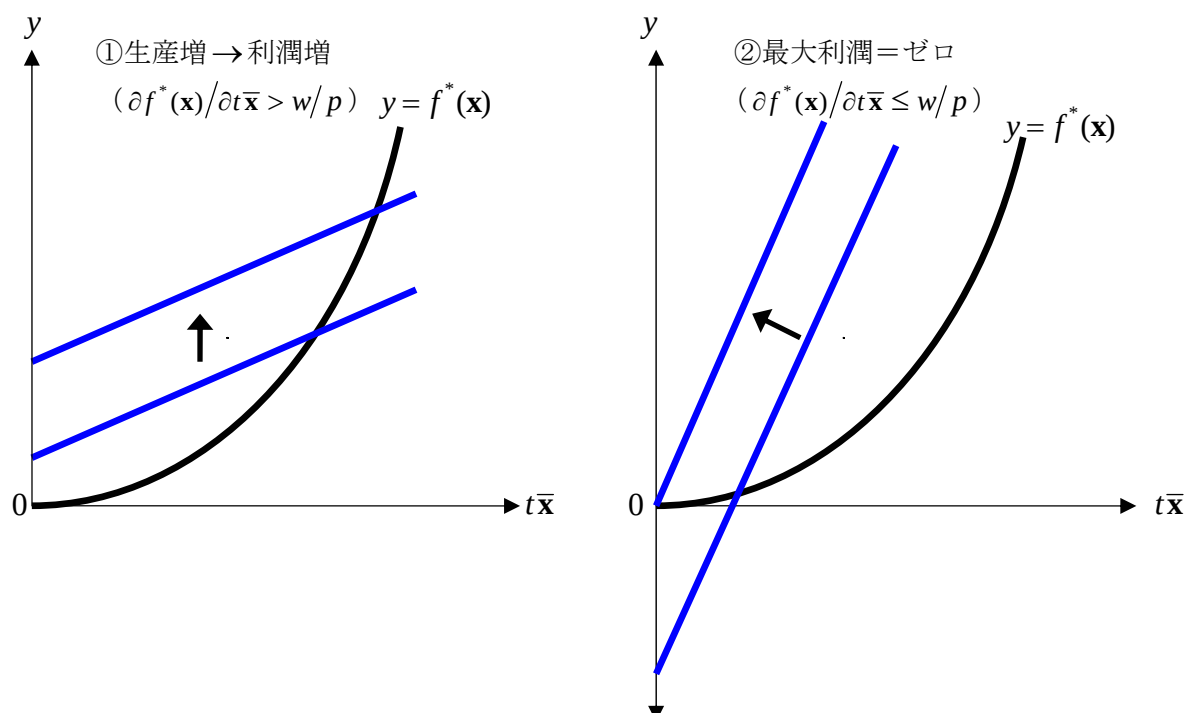


(3) 規模に関して収穫逓増 $\Rightarrow$ 一意解なし

$\Rightarrow$ 生産要素と生産物の価格比率によって

① $\partial f^*(\mathbf{x})/\partial t\bar{x} > w/p$ のとき：生産増 $\rightarrow$ 利潤増

② $\partial f^*(\mathbf{x})/\partial t\bar{x} \leq w/p$ のとき：最大利潤=ゼロ $\Rightarrow$ このとき生産量はゼロ



- 規模に関して収穫一定と収穫逓増のどちらかで、②最大利潤=ゼロの場合、
 生産増 $\rightarrow$ 利潤増の状態はどうなるか
 $\Rightarrow$ 生産規模拡大 $\rightarrow$ さらに利潤増
 $\Rightarrow$ すべての生産要素投入量増加
 $\Rightarrow$ やがて何らかの生産要素が上限に達する可能性
 $\Rightarrow$ ある生産要素が上限に達した時点 $\Rightarrow$ 長期 $\rightarrow$ 短期へ転換 $\Rightarrow$ 収穫逓減の法則がワーク

(2) 規模に関して収穫一定の場合 $\Rightarrow$ 収穫逓減の法則のもとで最大利潤が決まる

(3) 規模に関して収穫逓増の場合：

ケース a) そのときの企業の生産規模が市場全体の中で無視できないほど大きい

$\Rightarrow$ 不完全競争市場へ移行

ケース b) そのときの企業の生産規模が市場全体の中で十分に小さい

$\Rightarrow$ S 字型の短期生産関数による技術制約

費用曲線

● 短期の生産費用

生産要素: $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}_+^2$ のうち, $x_2 = \bar{x}_2$ で固定した短期生産関数 $y = f^*(x_1, \bar{x}_2) \in \mathbf{R}_+$ を考える。このとき可変生産要素と固定生産要素に対する費用は次のとおり。

総費用 (total cost, TC)

= 可変費用 (variable cost VC : $w_1 x_1$) + 固定費用 (fixed cost FC : $w_2 \bar{x}_2$)

● 費用曲線の形状

短期生産関数 $y = f(x_1, \bar{x}_2)$ が S 字型の場合 ($p.9$ の領域①を含む $\Rightarrow$ 固定生産要素に対して可変生産要素投入量が相対的にきわめて小さい領域で限界生産物が逓増する)

$\Rightarrow$ 対応する短期費用曲線: $c = c(y)$ は逆 S 字型となる

$\Rightarrow$ 生産関数と費用関数は、一方が決まるともう一方が決まる関係にある

$\Rightarrow$ これを生産関数と費用関数の双対性 (duality) という

● 限界費用 (marginal cost MC)

生産物を 1 単位増やすときの追加的費用: $mc(y) = dc(y)/dy$

S 字型 $y = f(x_1, \bar{x}_2) \Leftrightarrow$ 逆 S 字型 $c = c(y) \Rightarrow mp_1(\mathbf{x})$ と $mc(y)$ も逆の関係

$$\Leftarrow \text{所与の } w_1 \text{ のもとで, } mc(y) = \left. \frac{dc(y)}{dy} \right|_{x_2 = \bar{x}_2} = w_1 \frac{dx_1}{dy} = \frac{w_1}{mp_1(\mathbf{x})}$$

$\Rightarrow mc(y)$ と $mp_1(\mathbf{x})$ は反比例

● 平均費用: 生産物 1 単位あたりの費用: $AC = TC/y = c(y)/y$

平均可変費用 (average variable cost): 生産物 1 単位あたりの可変費用: $AVC = VC/y$

平均固定費用 (average fixed cost): 生産物 1 単位あたりの固定費用: $AFC = FC/y$

$\Rightarrow AC = AVC + AFC$

$y = f^*(x_1, \bar{x}_2) \in \mathbf{R}_+^3$ のとき, $avc(y) = \frac{w_1 x_1}{y} = w_1 \times \frac{1}{y/x_1} = \frac{w_1}{ap_1} \Rightarrow AVC$ と AP_1 は反比例

● 限界費用曲線と平均費用曲線の関係

$$\frac{d}{dy} ac(y) = \frac{d}{dy} \left(\frac{c(y)}{y} \right) = \frac{(dc(y)/dy)y - c(y)}{y^2} = \frac{1}{y} (mc(y) - ac(y)) = 0$$

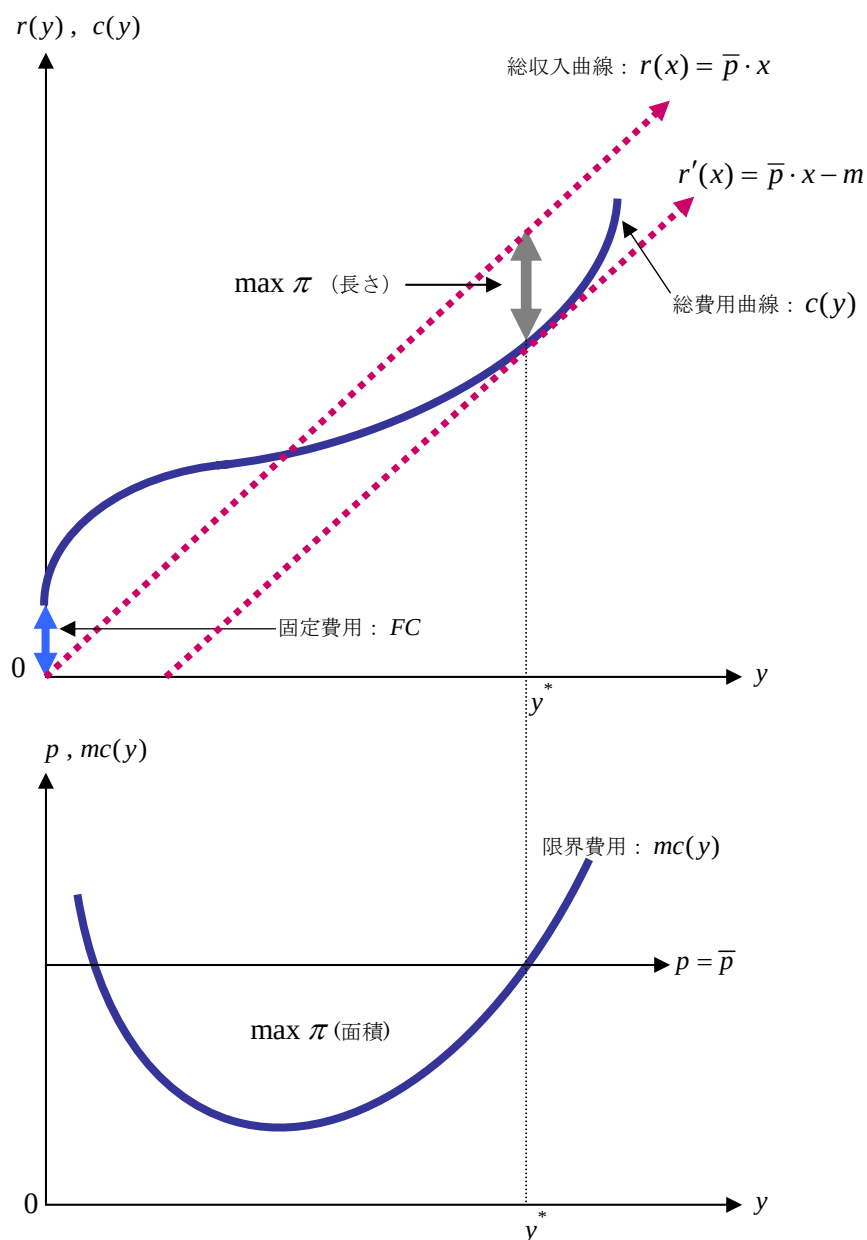
$$\frac{d}{dy} avc(y) = \frac{d}{dy} \left(\frac{c(y) - w_2 \bar{x}_2}{y} \right) = \frac{(dc(y)/dy)y - (c(y) - w_2 \bar{x}_2)}{y^2} = \frac{1}{y} (mc(y) - avc(y)) = 0$$

$\Rightarrow$ 限界費用: MC は平均費用: AC と平均可変費用: AVC の最低点をとる

●費用関数を用いた短期利潤最大化

$$\pi^* = \max_{(x,y): f^*(x)=y} \pi = \max_{(x,y): f^*(x)=y} py - wx = \max_{y:c(y)=c} py - c(y)$$

$$\frac{d\pi}{dy} = \frac{d}{dy}(py) - \frac{dc(y)}{dy} = p - mc(y) = 0 \Leftrightarrow p = mc(y)$$



●利潤最大化と固定費用

固定費用は総費用曲線を垂直方向に移動させる

$\Rightarrow$ 利潤を最大にする生産量 (y^*) には影響しない

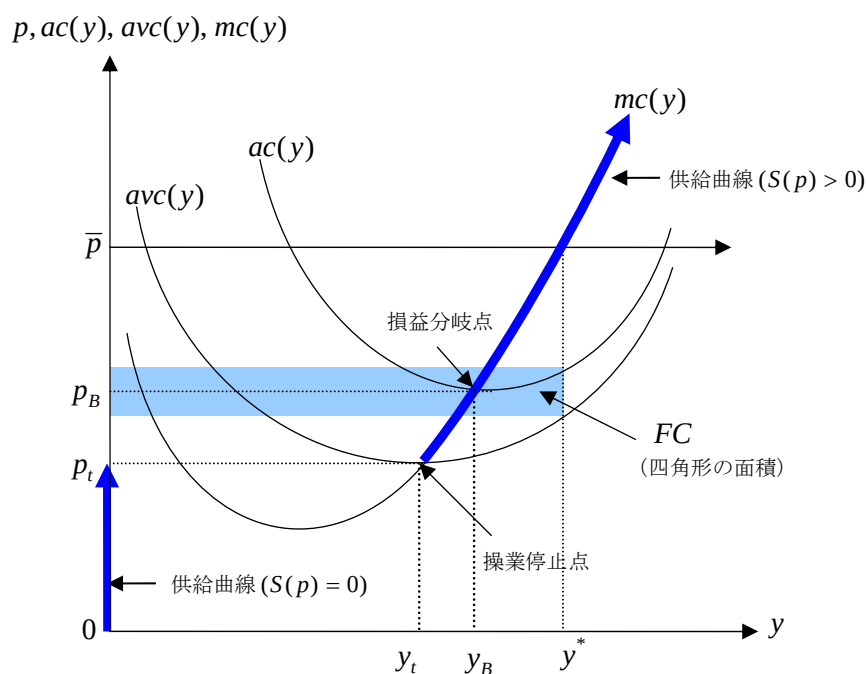
● 損益分岐点と操業停止点

● 損益分岐点 (break-even point)

- ⇒ 価格下落により総収入と総費用が等しくなった生産点のこと
- ⇒ 利潤がゼロとなる生産点
- ⇒ 固定費用がサunkしている場合、利潤がゼロであっても企業は操業を続ける
- ⇒ 短期利潤： $\pi = 0 \Leftrightarrow \pi = TR - TC = 0 \Leftrightarrow TR = TC$

● 操業停止点 (shutdown point)

- ⇒ さらに価格の下落が続くと利潤は負となる。継続的な価格下落で総収入と可変費用が等しくなった生産点のこと
- ⇒ 利潤+固定費用がゼロとなる生産点（負の利潤の絶対値が固定費用と等しい）
- ⇒ 固定費用がサunkしている場合、企業にとって操業の継続と停止が無差別な点
- ⇒ 短期利潤： $\pi + FC = 0 \Leftrightarrow \pi + FC = TR - (TC - FC) = TR - VC = 0 \Leftrightarrow TR = VC$



- 長期の生産費用

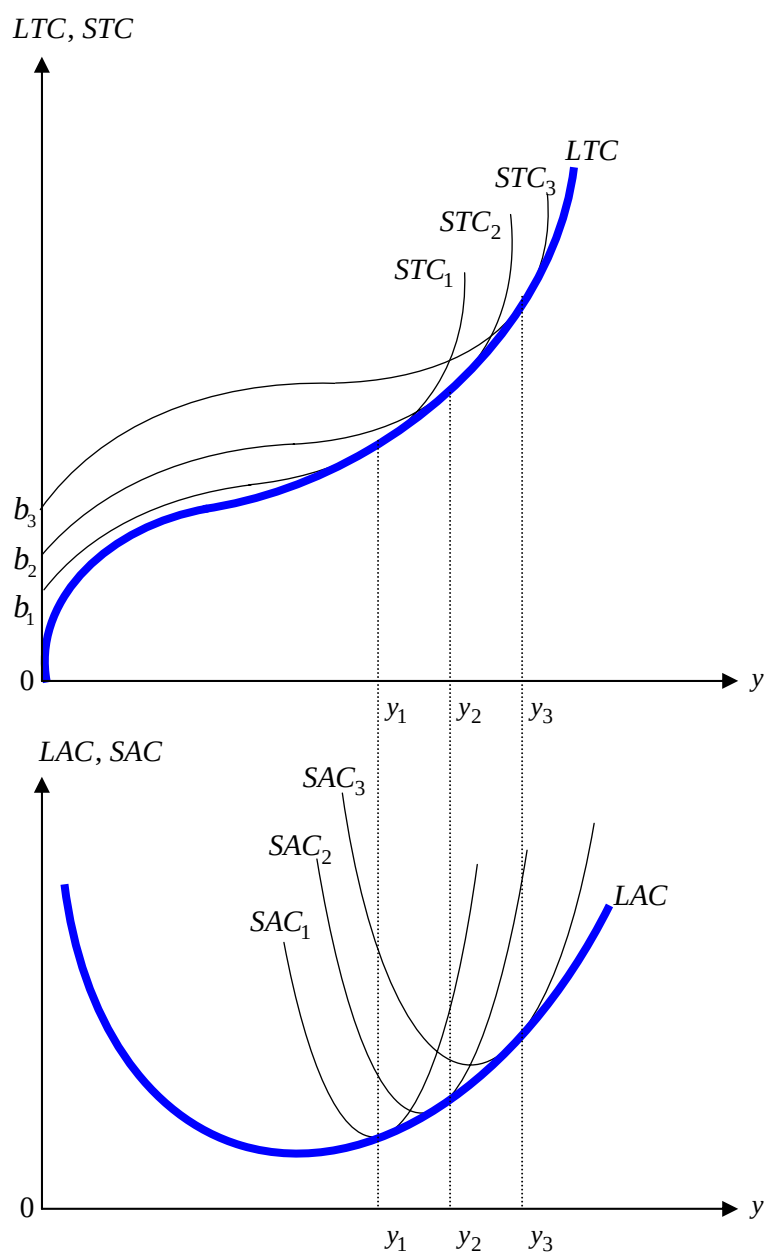
例えば、生産要素が $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}_+^2$ のとき、固定生産要素を含まない長期生産関数 $y = f^*(x_1, \bar{x}_2) \in \mathbf{R}_+^1$ に対応する生産費用を長期生産費用という

- 短期費用曲線と長期費用曲線の関係

長期総費用曲線 (LTC) は短期総費用曲線 (STC) 群の包絡線 (envelope)

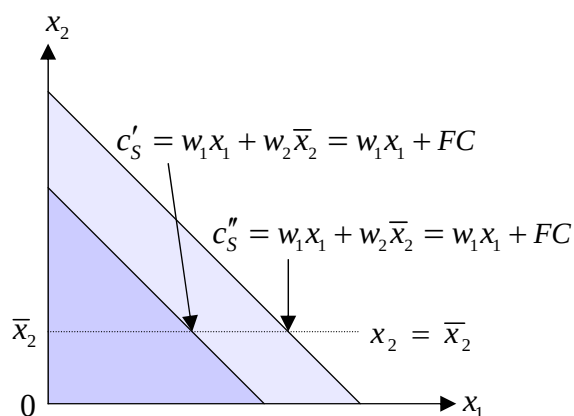
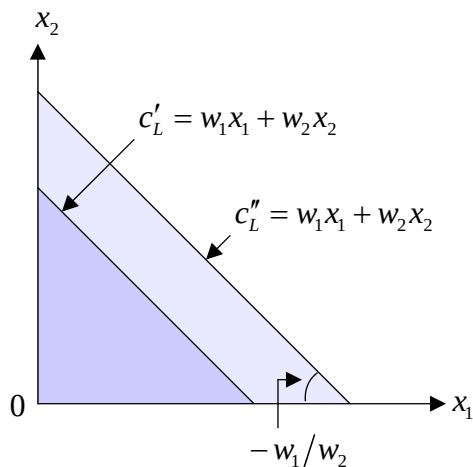
長期平均費用曲線 (LAC) は短期平均費用曲線 (SAC) 群の包絡線

長期平均費用 (LAC) の最小値を与える生産量を、生産の最適規模 (optimum scale) という

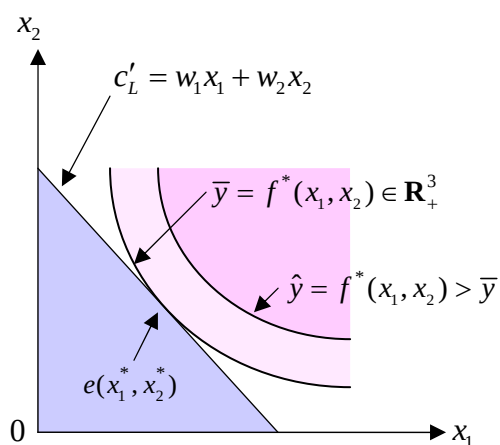


費用最小化

- 等費用線 (iso-cost line) : $\mathbf{w}$ 一定のもとで、同じ費用をもたらす $\mathbf{x}$ の組み合わせ



- 費用最小化



$\bar{y} = f^*(x_1, x_2)$ の生産を行うための最小費用

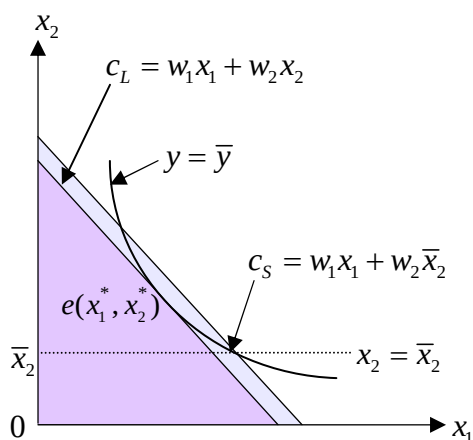
$$c_L^* = w_1 x_1^* + w_2 x_2^* = \min_{\mathbf{x}: f^*(x_1, x_2) = \bar{y}} \sum_{i=1}^2 w_i x_i$$

$$= c_L(w_1, w_2; \bar{y})$$

$c_L(w_1, w_2; \bar{y})$: 費用関数 (cost function)

$\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ の変化に対して $y = \bar{y}$ の生産を行うための最小費用 $w_1 x_1^* + w_2 x_2^*$ の軌跡

- 短期生産費用と長期生産費用の関係



c_S : 短期生産費用

c_L : 長期生産費用

$c_S \geq c_L$

$\bar{x}_2 = x_2^*$ のとき $\Rightarrow c_S = c_L$

$\bar{x}_2 \neq x_2^*$ のとき $\Rightarrow c_S > c_L$

$\Rightarrow$ 短期生産費用は固定生産要素が長期の均衡投入量に等しい場合 ($\bar{x}_2 = x_2^*$) のみ長期生産費用と一致するが、それ以外は長期生産費用を上回る

大学院

費用関数

- 費用関数 (cost function) $C(y; \mathbf{w}) = \min_{\mathbf{x}: f^*(\mathbf{x}) \geq y} \mathbf{w}^t \mathbf{x} = \mathbf{w}^t h(y; \mathbf{w})$

→ $\mathbf{w} > 0$ のもとで, $f^*(\mathbf{x}) \geq y > 0$ を満足するような最小費用を与える関数

- ①ある $y > 0$ のもとで, $C(y; \mathbf{w})$ は $\mathbf{w} > 0$ に関して 1 次同次の凹関数

凹関数の証明: 任意の $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ に対して $\bar{\mathbf{w}} = \theta \mathbf{w}_1 + (1-\theta)\mathbf{w}_2$ ($0 < \theta < 1$) とする

$\mathbf{w}_1^t h(y; \bar{\mathbf{w}}) \geq \mathbf{w}_1^t h(y; \mathbf{w}_1), \mathbf{w}_2^t h(y; \bar{\mathbf{w}}) \geq \mathbf{w}_2^t h(y; \mathbf{w}_2)$ より,

$$C(y; \bar{\mathbf{w}}) = \bar{\mathbf{w}}^t h(y; \bar{\mathbf{w}}) = \theta \mathbf{w}_1^t h(y; \bar{\mathbf{w}}) + (1-\theta) \mathbf{w}_2^t h(y; \bar{\mathbf{w}}) \geq \theta \mathbf{w}_1^t h(y; \mathbf{w}_1) + (1-\theta) \mathbf{w}_2^t h(y; \mathbf{w}_2)$$

- ②ある $\mathbf{w} > 0$ のもとで, $C(y; \mathbf{w})$ は $y > 0$ の単調増加関数

- ③ある $y > 0$ のもとで, $h(y; \mathbf{w})$ は $\mathbf{w} > 0$ に関してゼロ次同次関数

- 可変費用関数 (variable cost function)

$$C_V(y; \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) = \min_{\mathbf{x}_V: f^*(\mathbf{x}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) \geq y} \mathbf{w}_V^t \mathbf{x}_V = \mathbf{w}_V^t h_V(y; \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F)$$

→ $\mathbf{w}_V > 0$ のもとで, $f^*(\mathbf{x}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) \geq y > 0$ を満足するような最小可変費用を与える関数

- ①ある $y > 0$ のもとで, $C_V(y; \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F)$ は $\mathbf{w}_V > 0$ に関して 1 次同次の凹関数

- ②ある $\mathbf{w}_V > 0$ のもとで, $C_V(y; \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F)$ は $y > 0$ の単調増加関数

- ③ある $y > 0$ のもとで, $h_V(y; \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F)$ は $\mathbf{w}_V > 0$ に関してゼロ次同次関数

- 短期費用関数 (short-run cost function)

$$C_S(y; \mathbf{w}, \bar{\mathbf{x}}_F) = C_V(y; \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) + \mathbf{w}_F^t \bar{\mathbf{x}}_F = \mathbf{w}_V^t h_V(y; \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) + \mathbf{w}_F^t \bar{\mathbf{x}}_F$$

- ①ある $y > 0$ のもとで, $C_S(y; \mathbf{w}, \bar{\mathbf{x}}_F)$ は $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_V, \mathbf{w}_F) > 0$ に関して 1 次同次の凹関数

- ②ある $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_V, \mathbf{w}_F) > 0$ のもとで, $C_S(y; \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F)$ は $y > 0$ の単調増加関数

- ③ある $y > 0$ のもとで, $h_V(y; \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F)$ は $\mathbf{w}_V > 0$ に関してゼロ次同次関数

- 長期費用関数 (long-run cost function)

$$C_L(y; \mathbf{w}) = \min_{\bar{\mathbf{x}}_F: f^*(\mathbf{x}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) \geq y} C_S(y; \mathbf{w}, \bar{\mathbf{x}}_F) = \mathbf{w}^t h(y; \mathbf{w})$$

- ①ある $y > 0$ のもとで, $C_L(y; \mathbf{w})$ は $\mathbf{w} > 0$ に関して 1 次同次の凹関数

- ②ある $\mathbf{w} > 0$ のもとで, $C_L(y; \mathbf{w})$ は $y > 0$ の単調増加関数

- ③ある $y > 0$ のもとで, $h(y; \mathbf{w})$ は $\mathbf{w} > 0$ に関してゼロ次同次関数

- ④ある $y > 0, \mathbf{w} > 0$ のもとで $C_L(y; \mathbf{w}) \leq C_S(y; \mathbf{w}, \bar{\mathbf{x}}_F^*), C_L(y; \mathbf{w}) = C_S(y; \mathbf{w}, \bar{\mathbf{x}}_F^*(y; \mathbf{w}))$

利潤関数

- 利潤関数 (profit function)

$$\begin{aligned}\pi(p, \mathbf{w}) &= \max_{\mathbf{x}: f^*(\mathbf{x}) \geq y} \{ p f^*(\mathbf{x}) - \mathbf{w}^t \mathbf{x} \} = \max_y \{ p y - C_L(y; \mathbf{w}) \} \\ &= p s(p, \mathbf{w}) - \mathbf{w}^t h(y^*(p, \mathbf{w}); \mathbf{w})\end{aligned}$$

$$\text{ただし, } y^*(p, \mathbf{w}) = \arg \max_y \{ p y - C_L(y; \mathbf{w}) \} = s(p, \mathbf{w})$$

→ $(p, \mathbf{w}) > 0$ のもとで, $f^*(\mathbf{x}) \geq y > 0$ を満足するような最大利潤を与える関数

- ① $\pi(p, \mathbf{w})$ は $(p, \mathbf{w}) > 0$ に関して 1 次同次の凸関数

凸関数の証明: 任意の $p_1, p_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ に対して $\bar{p} = \theta p_1 + (1-\theta)p_2$ ($0 < \theta < 1$)

$\bar{\mathbf{w}} = \theta \mathbf{w}_1 + (1-\theta)\mathbf{w}_2$ ($0 < \theta < 1$) とする

$$p_1^t s(\bar{p}, \mathbf{w}) \leq p_1^t s(p_1, \mathbf{w}), \quad p_2^t s(\bar{p}, \mathbf{w}) \leq p_2^t s(p_2, \mathbf{w}), \quad \mathbf{w}_1^t h(y; \bar{\mathbf{w}}) \geq \mathbf{w}_1^t h(y; \mathbf{w}_1), \\ \mathbf{w}_2^t h(y; \bar{\mathbf{w}}) \geq \mathbf{w}_2^t h(y; \mathbf{w}_2) \text{ より,}$$

$$\begin{aligned}\pi(\bar{p}; \bar{\mathbf{w}}) &= \bar{p}^t s(\bar{p}, \bar{\mathbf{w}}) - \bar{\mathbf{w}}^t h(y; \bar{\mathbf{w}}) \\ &\leq \theta \{ p_1^t s(p_1, \mathbf{w}) - \mathbf{w}_1^t h(y; \mathbf{w}_1) \} + (1-\theta) \{ p_2^t s(p_2, \mathbf{w}) - \mathbf{w}_2^t h(y; \mathbf{w}_2) \}\end{aligned}$$

- ② ある $\mathbf{w} > 0$ のもとで, $\pi(p, \mathbf{w})$ は $p > 0$ の非減少関数

- ③ ある $p > 0$ のもとで, $\pi(p, \mathbf{w})$ は $\mathbf{w} > 0$ の非増加関数

- ④ ある $\mathbf{w} > 0$ のもとで, $s(p, \mathbf{w})$ は $p > 0$ の非減少関数

- 短期可変利潤関数 (short-run variable profit function)

$$\begin{aligned}\pi_V(p, \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) &= \max_{\mathbf{x}_V: f^*(\mathbf{x}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) \geq y} \{ p f^*(\mathbf{x}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) - \mathbf{w}_V^t \mathbf{x}_V \} = \max_y \{ p y - C_V(y; \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) \} \\ &= p s_V(p, \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) - \mathbf{w}_V^t h_V(y^*(p, \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F), \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F)\end{aligned}$$

$$\text{ただし, } y^*(p, \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) = \arg \max_y \{ p y - C_V(y; \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) \} = s_V(p, \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F)$$

- ① $\pi_V(p, \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F)$ は $(p, \mathbf{w}_V) > 0$ に関して 1 次同次の凸関数

- ② ある $\mathbf{w}_V > 0$ のもとで, $\pi_V(p, \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F)$ は $p > 0$ の非減少関数

- ③ ある $p > 0$ のもとで, $\pi_V(p, \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F)$ は $\mathbf{w}_V > 0$ の非増加関数

- 短期利潤関数 (short-run profit function)

$$\pi_S(p, \mathbf{w}, \bar{\mathbf{x}}_F) = \pi_V(p, \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) - \mathbf{w}_F^t \bar{\mathbf{x}}_F = p s_V(p, \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) - \mathbf{w}_F^t \bar{\mathbf{x}}_F$$

- ① $\pi_S(p, \mathbf{w}, \bar{\mathbf{x}}_F)$ は $(p, \mathbf{w}) > 0$ に関して 1 次同次の凸関数

- ② ある $\mathbf{w} > 0$ のもとで, $\pi_S(p, \mathbf{w}, \bar{\mathbf{x}}_F)$ は $p > 0$ の非減少関数

- ③ ある $p > 0$ のもとで, $\pi_S(p, \mathbf{w}, \bar{\mathbf{x}}_F)$ は $\mathbf{w} > 0$ の非増加関数

- 長期利潤関数 (long-run profit function)

$$\pi_L(p, \mathbf{w}) = \max_{\bar{\mathbf{x}}_F : f^*(\mathbf{x}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) \geq y} \pi_S(p, \mathbf{w}, \bar{\mathbf{x}}_F) = ps(p, \mathbf{w}) - \mathbf{w}^t h(y^*(p, \mathbf{w}); \mathbf{w})$$

$$\text{ただし, } y^*(p, \mathbf{w}) = \arg \max_y \{ py - C_L(y; \mathbf{w}) \} = s(p, \mathbf{w})$$

- ① $\pi_L(p, \mathbf{w})$ は $(p, \mathbf{w}) > 0$ に関して 1 次同次の凸関数
- ② ある $\mathbf{w} > 0$ のもとで, $\pi_L(p, \mathbf{w})$ は $p > 0$ の非減少関数
- ③ ある $p > 0$ のもとで, $\pi_L(p, \mathbf{w})$ は $\mathbf{w} > 0$ の非増加関数
- ④ ある $y > 0$, $\mathbf{w} > 0$ のもとで $\pi_L(p, \mathbf{w}) \geq \pi_S(p, \mathbf{w}, \bar{\mathbf{x}}_F)$, $\pi_L(p, \mathbf{w}) = \pi_S(p, \mathbf{w}, \bar{\mathbf{x}}_F(p, \mathbf{w}))$

補題 (lemma)

- シェパードの補題 (Shephard's lemma) $\Rightarrow$ 可変生産要素派生需要関数
(conditional input demand function derived from given output y)

$$\textcircled{1} \frac{\partial}{\partial w_V^i} C_V(y; \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) = h_V^i(y; \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F)$$

$$\textcircled{2} \frac{\partial}{\partial w_V^i} C_L(y; \mathbf{w}) = h_L^i(y; \mathbf{w})$$

- ホテリングの補題 (Hotelling's lemma)

$\Rightarrow$ 生産物供給関数 (output supply function)

$$\textcircled{1} \frac{\partial}{\partial p} \pi_V(p, \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) = s_V(p, \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F)$$

$$\textcircled{2} \frac{\partial}{\partial p} \pi_L(p, \mathbf{w}) = s_L(p, \mathbf{w})$$

$\Rightarrow$ 可変生産要素派生需要関数

(input demand function derived from output supply)

$$\textcircled{1} \frac{\partial}{\partial w_V^i} \pi_V(p, \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) = -d_V^i(p, \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F)$$

$$\textcircled{2} \frac{\partial}{\partial w_V^i} \pi_L(p, \mathbf{w}) = -d_L^i(p, \mathbf{w})$$

- 固定生産要素価格 (shadow price $\Leftarrow$ 包絡面定理による)

① 可変費用関数による導出

$$C_L(y; \mathbf{w}) = \min_{\bar{\mathbf{x}}_F: f^*(\mathbf{x}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) \geq y} C_S(y; \mathbf{w}, \bar{\mathbf{x}}_F) = C_S^*(y; \mathbf{w}, \bar{\mathbf{x}}_F^*) \text{ のとき,}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \bar{x}_F^j} C_S(y; \mathbf{w}, \bar{\mathbf{x}}_F) \right|_{\bar{\mathbf{x}}_F = \bar{\mathbf{x}}_F^*} = \left. \frac{\partial}{\partial \bar{x}_F^j} C_V(y; \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) \right|_{\bar{\mathbf{x}}_F = \bar{\mathbf{x}}_F^*} + w_F^j = 0$$

$$\Leftrightarrow - \left. \frac{\partial}{\partial \bar{x}_F^j} C_V(y; \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) \right|_{\bar{\mathbf{x}}_F = \bar{\mathbf{x}}_F^*} = w_F^j$$

② 短期可変利潤関数による導出

$$\pi_V(p, \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) = \max_{\mathbf{x}_V: f^*(\mathbf{x}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) \geq y} \{ p f^*(\mathbf{x}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) - \mathbf{w}_V^t \mathbf{x}_V \} = p f^*(\mathbf{x}_V^*, \bar{\mathbf{x}}_F) - \mathbf{w}_V^t \mathbf{x}_V^* \text{ のとき,}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_F^j} \pi_V(p, \mathbf{w}_V, \bar{\mathbf{x}}_F) = p \frac{\partial}{\partial \bar{x}_F^j} f^*(\mathbf{x}_V^*, \bar{\mathbf{x}}_F)$$

①の shadow price は $\bar{x}_F$ の均衡投入量 ($\bar{x}_F^*$) を導く市場価格

②の shadow price は $x_F = \bar{x}_F$ における限界価値生産物