令和４年度

神戸大学「志」特別選抜

最終選抜　総合問題（情報知能工学）

［注意事項］

- 解答はじめの合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません．
- この冊子は，表紙１ページ，問題５ページの計６ページからなります．
- 解答用紙は，各問題に１枚，計３枚あります．また，計算用紙は１枚あります．
- 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気づいた場合は，手を高く上げて監督者に知らせること．
- 解答用紙，計算用紙，問題冊子の所定欄に受験番号を必ず記入すること．
- 異なる解答用紙に答案を記入すると採点されない場合があります．
- 解答用紙には，解答に関係のない文字，記号，符号等を記入してはいけません．
- 問題冊子の余白は自由に使って構いません．
- 解答用紙，計算用紙，問題冊子は試験終了後に回収します．

受験番号	

【問題１】

以下の問 1 から問 3 に答えよ．ただし e は自然対数の底を表す．

問 1. S を実数の集合，$f(x)$ を，S を定義域とする関数とする．最大値および上限をつぎのように定義する．

- 実数 m が $f(x)$ の S における最大値であるとは，(i) 集合 S の任意の要素 x について $m \geq f(x)$ が成り立ち，かつ (ii) 集合 S のある要素 y について $m = f(y)$ となることである．
- 実数 u が $f(x)$ の S における上限であるとは，(i′) 集合 S の任意の要素 x について $u \geq f(x)$ が成り立ち，かつ (ii′) u 未満の任意の実数 c に対して，集合 S のある要素 z が存在して $f(z) \geq c$ となることである．

この定義に基づいてつぎの問いに答えよ．

(1) u が $f(x)$ の S における最大値であるとき，u は $f(x)$ の S における上限でもあることを示せ．

(2) u が $f(x)$ の S における上限であるとき，つぎの (A), (B) をともに満たす実数列 a_n , $n = 1, 2, \ldots$ が存在することを示せ．

(A) $a_n \in S, \quad n = 1, 2, \ldots$ (B) $|f(a_n) - u| \leq \dfrac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$

また，つぎのように具体的に与えられた $f(x)$ および S についての問いに答えよ．

(3) $f(x) = e^{-x}$, $S = \{x \,|\, x \geq 0,\ x$ は実数$\}$ とする．$f(x)$ の S における最大値が 1 であること示せ．

(4) $f(x) = 1 - e^{-x}$, $S = \{x \,|\, x \geq 0,\ x$ は実数$\}$ とする．$f(x)$ の S における上限が 1 であることを示せ．

問 2. S, T が集合であるとき，$S \subset T$ かつ $T \subset S$ が示されれば，両者は一致する，すなわち $S = T$ であることが示される．ここで，つぎのことを注意する．

(i) S の任意の元が T にも属すなら，$S \subset T$ である．

(ii) T の任意の元が S にも属すなら，$T \subset S$ である．

上記 (i), (ii) を示すことにより，つぎの (1), (2) の集合 S, T において $S = T$ が成り立つことを示せ．ただし，(2) において x は実数，$f(x)$ は実数の値をとる関数である．

(1) $S = \{x \,|\, x^2 - x = 0,\ x$ は実数$\}$, $T = \{0, 1\}$

(2) S は，すべての実数 x について $f'(x) = f(x)$ を満たす微分可能な関数 $f(x)$ の集合．T は，実数の定数 C によって $f(x) = Ce^x$ と表される関数 $f(x)$ の集合．

（参考） (2) の解答の一部においては，S の元 $f(x)$ に対して定義される関数

$$h(x) = e^{-x} f(x)$$

の微分 $h'(x)$ を利用できる．

（問題１はつぎのページに続く）

問 3. 平面の点 (x, y) の集合に関して，集合列，単調増加集合列，上極限集合をつぎのように定義する．

- n を自然数とする．各自然数 n に対して，平面の点 (x, y) の集合 S_n を定義する．例えば，中心を原点 $(0, 0)$，半径を $1 - 2^{-n}$ とする円の円周および内部を集合 S_n で表すと

$$S_n = \{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 - 2^{-n},\ x \text{ および } y \text{ は実数}\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

  となる．このように自然数 n で番号付けられた集合 $S_1, S_2, \ldots$ を集合列と呼び，$\{S_n\}$ のように記す．

- 任意の自然数 k について $S_k \subset S_{k+1}$ が成り立つとき，すなわち

$$S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_{k-1} \subset S_k \subset S_{k+1} \subset \cdots$$

  が成り立つとき，$\{S_n\}$ を単調増加集合列と呼ぶ．

- 単調増加集合列 $\{S_n\}$ に対し，すべての集合 S_n の和集合を $\{S_n\}$ の上極限集合と呼び，$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ で表す．ここで点 (x, y) が $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ に属するとは，ある自然数 n について $(x, y) \in S_n$ となることである．

以上を踏まえてつぎの問いに答えよ．

(1) 集合列 $\{S_n\}$ を

$$S_n = \{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 - 2^{-n},\ x \text{ および } y \text{ は実数}\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

と定義する．$\{S_n\}$ が単調増加集合列であることを示せ．

(2) $\{S_n\}$ の上極限集合がつぎの集合 U に一致することを示せ．

$$U = \{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < 1,\ x \text{ および } y \text{ は実数}\}$$

【問題２】

つぎの説明を読んで，以下の問１，問２に答えよ．

ロウソクの両端を図2-1のように切り，両側から芯が出るようにする．ロウソクの重心に針を通して図2-2のように台の上におく．ただし，切った後のロウソクは左右対称であるとし，ロウソクは針を軸として，摩擦の影響を受けることなく，自由に回転できるものとする．また，台の上における針の位置は変わらないと仮定する．
なお，解答に際しては，必要であれば記号などを自由に導入してもよい．その場合には，図を用いて説明するなどして，記号の意味を明確にすること．また，必要に応じて，例えば，自身の日常の経験・観察からの考察を行うなど，自由に論じてよい．

問1. 図2-3のように，ロウソクを，少しだけ右側が上になるようにしつつ，静かに台の上においた．説明に必要な物理法則・理論に言及しつつ，その後のロウソクの運動について論じよ．

問2. 問1と同じように，ロウソクを，少しだけ右側が上になるようにしつつ，静かに台の上におき，ロウソクの両側に同時に火をつけた．説明に必要な物理法則・理論に言及しつつ，その後のロウソクの運動について，可能な限り詳細に論じよ．

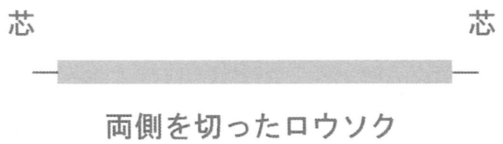

図2-1

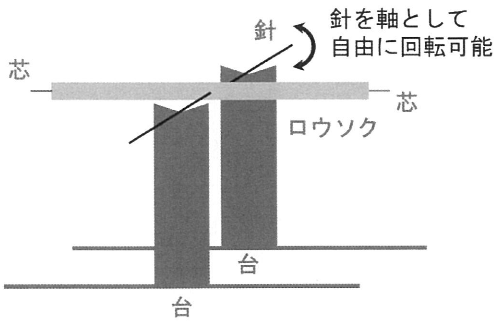

図2-2

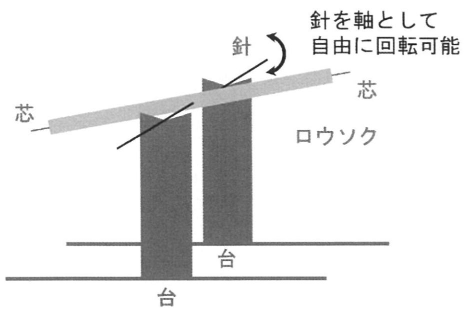

図2-3

【問題３】

つぎの説明を読んで，以下の問１から問３に答えよ．

２種類のスイッチング素子（与える入力電圧によってその抵抗値が変化するデバイス）を用いて論理回路（入力と出力のそれぞれがいずれもデジタル値，すなわち0Vか1Vのいずれかの電圧のみとなる回路）を構成したい．２種類のスイッチング素子の１つは正論理スイッチング素子で，図3-1にその記号を示す．ゲートに1Vを加えると両端子ＰとＱの間の抵抗値は零となり導通するが，ゲートに0Vを加えると両端子間の抵抗値は無限大となり絶縁される．

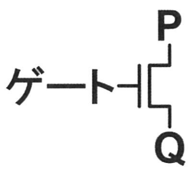

図3-1

もう１つは負論理スイッチング素子で，図3-2にその記号を示す．ゲートに0Vを加えると両端子ＭとＮの間の抵抗値は零となり導通するが，ゲートに1Vを加えると両端子間の抵抗値は無限大となり絶縁される．

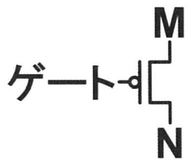

図3-2

２つの１ビットＡとＢの足し算を半加算といい，その演算を行う論理回路を半加算器という．半加算器の入力ＡとＢの和を出力S，桁上りを出力Ｋと定義する．それら入出力の関係は表3-1で与えられる．

表3-1

入力		出力	
A	B	K	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

（問題３はつぎのページに続く）

すなわち0+0のとき，和は0となる．0+1または1+0のとき，和は1となる．1+1のとき，和は0となるが，この場合のみ桁上り1が生じる．つまり桁上りKはAとBの論理積（論理記号表現では$K=A \wedge B$もしくは集合記号表現では$K=A \cap B$）である．論理積を実現する回路を上記２種類のスイッチング素子で設計する場合，その回路は多数挙げられるが，例えば図3-3，図3-4，図3-5のような構成が可能である．

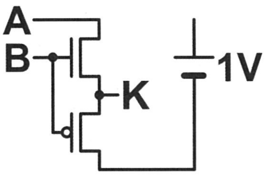

図3-3

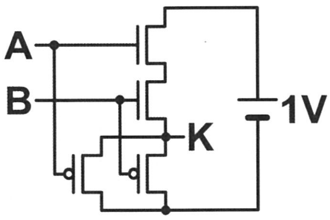

図3-4

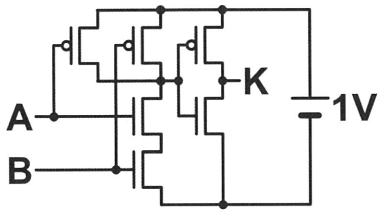

図3-5

なお上記回路図において，上下と左右の配線の交点に黒点がある場合，それら上下と左右の配線は接続されている．上下と左右の配線の交点に黒点がない場合，それら上下と左右の配線は接続されていない．

問1．図3-3，図3-4，図3-5のいずれかを選び，それが入力AとBの論理積Kを実現する回路の動作をしていることを可能な限り詳細に説明せよ．答案に回路図を書いてもよい．

問2．半加算器の入力AとBに対してその和Sの論理を実現する回路の一例を任意の数の正論理スイッチング素子，負論理スイッチング素子，1Vの電池を用いて回路図で書け．

問3．３つの１ビットAとBとCの足し算を全加算といい，その演算を行う論理回路を全加算器という．全加算器の入出力の関係は表3-2で与えられる．全加算器は半加算器２個を過不足なく使って設計できるかどうかを，その理由とともに可能な限り詳細に論ぜよ．答案に論理記号もしくは集合記号を用いてもよい．

表3-2

入力			出力	
A	B	C	K	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1