2020年度『志』特別入試

最終選抜　総合問題（情報知能工学）

［注意事項］

- 解答はじめの合図があるまで，この問題冊子を開いていはいけません。
- この冊子は，表紙1枚，問題3枚の計4枚からなります。
- 解答用紙は，各問題に1枚，計3枚あります。また，計算用紙は1枚あります。
- 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気づいた場合は，手を高く上げて監督者に知らせること。
- 解答用紙，計算用紙，問題冊子の所定欄に受験番号を必ず記入すること。
- 異なる解答用紙に答案を記入すると採点されない場合があります。
- 解答用紙には，解答に関係のない文字，記号，符号等を記入してはいけません。
- 問題冊子の余白は自由に使って構いません。
- 解答用紙，計算用紙，問題冊子は試験終了後に回収します。

受験番号	

【問題1】

p と q が自然数のとき，p を q で割った余りを $p \bmod q$ と書く。以下の問に答えよ。

(1) $3^{16} \bmod 1000$ を計算せよ。

(2) $3^{993} \bmod 1000$ を計算せよ。

(3) x，n，d を自然数とする。$x^n \bmod d$ を効率よく計算する方法を述べよ。

【問題 2】

巨大な回転装置の上に設置された円筒形の部屋（軸は鉛直方向）があるとしよう。この部屋には窓がなく，外を見ることも，外と通信することもできない。また，外部の磁場も遮断されている。回転装置を駆動すると，円筒の軸を回転軸として部屋全体がある一定の角速度で回転する。その角速度はそれほど大きくはなく，中にいる人が壁際に立つとわずかに遠心力を感じる程度である。

あなたがこの部屋に入り，この部屋がどの向きに回転しているのか（上から見下ろして時計回りか反時計回りか）を推測するように言われたとしよう。部屋の中に何を持ち込んでもよいとしたら，あなたは何を持ち込み，どのような方法で回転方向を推測するかを述べよ。

また，その角速度の大きさを推定する方法についても述べよ。

【問題3】

重さがわずかに異なる N 個の金属片があり，二つの金属片を天秤にかけるとどちらが重いのかがわかる。この天秤を使って，金属片を軽いものから重いものへと昇順に並べたい。なお，$N = 2^n$（n は自然数）とする。また，i 番目に軽い金属片を $\boxed{i}$ で表し，金属片を並べ終えるまでに二つの金属片を天秤にかける回数を「総作業数」と呼ぶことにする。

次の三つの問に答えよ。

(1) 初期状態として N 個の金属片を適当に左から右に一列に並べ，各々の位置に左から順に $1, 2, \ldots, N$ と番号を振る。i 番目と $i+1$ 番目の位置にある金属片を取り出して天秤にかけ，軽い方を i 番目，重い方を $i+1$ 番目の位置に戻す。この作業を，$i = 1, 2, \ldots, N-1$ と変化させながら繰り返すと，最も重い金属片は右端にくる。このアイデアをもとに，できるだけ少ない総作業数で，重さが左から右に昇順になるよう金属片を並べ替える手続きを考え，その概要を述べよ。また，$N = 8$ のとき，初期状態として，金属片が左から右に一列に $\boxed{7}\boxed{3}\boxed{5}\boxed{1}\boxed{8}\boxed{4}\boxed{6}\boxed{2}$ と並んでいる場合，$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{7}\boxed{8}$ と並んでいる場合のそれぞれに対し，考案した手続きに基づく総作業数を示せ。さらに，総作業数が最も多くなる初期状態，最も少なくなる初期状態はどのような場合かを説明するとともに，それぞれの場合に対して要する総作業数を N を用いて示せ。

(2) (1) と異なる手続きを以下に従って考える。その基となるアイデアを次の例を使って説明する。まず，n 個の金属片が左から右に順に重くなるよう（昇順）に並んでいるとき，これを長さ n の順序列と呼ぶことにする。ここで，4 個の金属片が長さ 2 の順序列 $\boxed{1}\boxed{3}$ と $\boxed{2}\boxed{4}$ に分けられていたとしよう。これらを併合して長さ 4 の順序列を新たに作る。初めに，元となる二つの順序列のそれぞれから最も軽い左端の金属片 $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ を取り出して天秤にかけ，より軽い $\boxed{1}$ を新たに作る順序列の最初の金属片とし，重い方の $\boxed{2}$ を元の場所に戻す。このとき，元の順序列は $\boxed{3}$ と $\boxed{2}\boxed{4}$ となる。続いて，元の順序列のそれぞれから最も軽い金属片 $\boxed{3}$ と $\boxed{2}$ を取り出して天秤にかけ，より軽い $\boxed{2}$ を新たに作る順序列に右から加えて $\boxed{1}\boxed{2}$ とし，重い方の $\boxed{3}$ を元の場所に戻す。このとき，元の順序列は $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ となる。さらに，元の順序列のそれぞれから（最も軽い）金属片 $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ を取り出して天秤にかけ，より軽い $\boxed{3}$ を新たに作る順序列に右から加えて $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ とし，重い方の $\boxed{4}$ を元の場所に戻す。このとき，元の順序列の一方はなくなったので，他方の残りの順序列 $\boxed{4}$ を新たに作る順序列に右から連結すると，長さ 4 の順序列 $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$ を得る。このアイデアを元の問題に応用する。初期状態として N 個の金属片を適当に左から右に一列に並べる。この並びは，長さ 1 の順序列が全部で N あるとみなせる。そこで，これらを左から二つずつ選んで上記の手続きに従って併合すると，長さ 2 の順序列が全部で $N/2$ できる。こうして，左から二つずつ順序列を選んで元の倍の長さの順序列を作る操作を繰り返すと，最終的に長さ N の順序列を得る。この手続きについて，総作業数が最も多くなる初期状態，最も少なくなる初期状態はどのような場合かを説明するとともに，それぞれの場合に対して要する総作業数を N を用いて示せ。

(3) 総作業数が少ない手続きほどより優れていると考えよう。N が大きいとき，(1)，(2) で考察した手続きは，どのような場合に，どちらが優れているのかを論じよ。