令和3年度

神戸大学「志」特別選抜

最終選抜　総合問題（情報知能工学）

［注意事項］

- 解答はじめの合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。
- この冊子は，表紙1枚，問題5枚の計6枚からなります。
- 解答用紙は，各問題に1枚，計3枚あります。また，計算用紙は1枚あります。
- 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気づいた場合は，手を高く上げて監督者に知らせること。
- 解答用紙，計算用紙，問題冊子の所定欄に受験番号を必ず記入すること。
- 異なる解答用紙に答案を記入すると採点されない場合があります。
- 解答用紙には，解答に関係のない文字，記号，符号等を記入してはいけません。
- 問題冊子の余白は自由に使って構いません。
- 解答用紙，計算用紙，問題冊子は試験終了後に回収します。

受験番号	

【問題 1】

次の説明を読んで，後の問 1 から問 7 に答えよ。

A を自然数の部分集合で，有限なものとする。関数 f が A から A への 1 対 1 対応のとき，f を A 上の置換と呼ぶ。すなわち，f が関数で次の 2 つの条件 (i), (ii) をみたすとき，f を A 上の置換と呼ぶ。

(i) $x \in A$ のとき $f(x) \in A$

(ii) $x, x' \in A$, $x \neq x'$ のとき $f(x) \neq f(x')$

たとえば，$A = \{1,2,3,4\}$ で，$f_4(1) = 2$，$f_4(2) = 4$，$f_4(3) = 1$，$f_4(4) = 3$ とすると f_4 は $\{1,2,3,4\}$ 上の置換である。$\{1,2,3,4\}$ 上の置換 f は次のような表（対応表）で表すことができる。

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) \end{pmatrix}$$

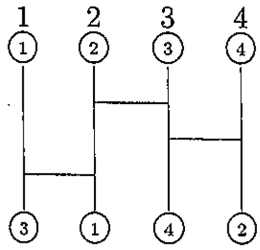
上の f_4 の場合は

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

である。

置換は配置換えを表していると考えられる。場所に番号をつけておき，各 i について i 番の場所から $f(i)$ 番の場所にものを移動するという操作を表すと考える。

置換は配置換えなので，あみだくじでも表現できる。たとえば上の f_4 は次のあみだくじで表現できる。縦線に 1，2，3，4 と番号をふる。①，②，③，④ は並べ替えるものを表しており，補助的に記入している。



並べ替えを何度もやる場合，それを関数の合成で表そうとすると場所の対応（どこからどこに移動したかという対応）と考えるのが妥当なことがわかる。

問 1. 次の置換 g を上の例にならってあみだくじで表現せよ。

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

問 2. f を集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上の置換とする。f を k 個合成してできる関数を f^k と書く。帰納的に，$f^0(x) = x$，$f^{k+1}(x) = f(f^k(x))$ である。$\{1, 2, \ldots, n\}$ 上の置換 f について

$$f^m(x) = x \quad (x = 1, 2, \ldots, n)$$

となる $m \geqq 1$ がある。すなわち，ある自然数 m に対し，置換 f による並び替えを m 回繰り返すと元の位置にもどる。そのような m の最小値を f の周期と呼ぶ。

$f = f_4$ のとき

$$(f^2(1)\ f^2(2)\ f^2(3)\ f^2(4)),\ (f^3(1)\ f^3(2)\ f^3(3)\ f^3(4)),\ (f^4(1)\ f^4(2)\ f^4(3)\ f^4(4))$$

を順に計算し，f_4 の周期を調べよ。

問 3. $2n$ 枚のカードの山（1列に重ねてあるもの）があるとする。上から n 枚と下から n 枚の 2 つの山に分け，交互に並べ直す並べ替えを完全シャッフルと呼ぶ。ただし下半分の先頭のカードが全体の最初に来るように重ねることとする。一番上を 1 枚目と考えれば，集合 $\{1, 2, \ldots, 2n-1, 2n\}$ 上の置換で表せる。1 枚目から n 枚目までは偶数番目に順序を変えずに配置し，$n+1$ 枚目から $2n$ 枚目までは奇数番目に順序を変えずに配置するということである。

4 枚の場合は，上に示した f_4 が完全シャッフルを表す置換である。6 枚の場合の完全シャッフルは次の f_6 で表せる。

$$f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

f_6 の周期を調べよ。

問 4. 8 枚の場合の完全シャッフルを表す集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 上の置換 f_8 を問 3 の f_6 のように表し，その周期を調べよ。

問 5. 一般の $2n$ 枚の完全シャッフルを表す集合 $\{1, 2, \ldots, 2n-1, 2n\}$ 上の置換 f_{2n} を次の形式で表現せよ。

$$f_{2n}(x) = \begin{cases} \text{式} & (1 \leqq x \leqq n) \\ \text{式} & (n+1 \leqq x \leqq 2n) \end{cases}$$

問 6. f_{50} の周期は 8，f_{52} の周期は 52 であることを示せ。また，f_{2n} の周期について何が言えるか。

問 7. 他に気がついたことを述べよ。（たとえば，任意の置換をあみだくじで表現する方法，任意の置換に周期があることの理由など）

【問題 2】

物理学に現れる定義や方程式は一般に 3 つ以上の物理量の間の関係を与える。従って，いくつかの物理量を基本にとって他の物理量を表せる。

長さ L，質量 M，時間 T，電流 I を基本的な物理量とする国際単位系では，任意の物理量 Q は

$$Q = qL^aM^bT^cI^d \tag{1}$$

（q は実数）という形で表され，その単位は，m（メートル），kg（キログラム），s（秒），A（アンペア）を用いて，$\mathrm{m}^a\mathrm{kg}^b\mathrm{s}^c\mathrm{A}^d$ である。このとき，$L^aM^bT^cI^d$ を物理量 Q の次元（ディメンション）といい，$[Q] = L^aM^bT^cI^d$ と書くことにする。たとえば，速度の次元は LT^{-1}，加速度の次元は LT^{-2} であり，ニュートンの運動方程式

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{2}$$

より，力の次元は LMT^{-2} となる。ここで，m は質点の質量，$\vec{a}$ は質点の加速度ベクトル，$\vec{F}$ は質点に働く力のベクトルを表す。以上のことを踏まえて，以下の問 1 から問 4 に答えよ。

問 1. 20 世紀の初め，原子の構造がどのようなものであるかは当時の科学者たちの大きな関心事であった。その中で，1 つの有力な考えとして，惑星が太陽の周りを回っているように，負の電荷をもった電子が正の電荷をもった原子核の周りを回っているというモデルがラザフォードらによって考えられた。そこで，周囲に何もない宇宙の真空の中で，質量 M_n と電荷 $+e$ をもつ静止した 1 個の陽子の周りを質量 m_e と電荷 $-e$ をもつ 1 個の電子が運動している水素原子のモデルを考え，$M_n \gg m_e$（M_n は m_e より十分に大きい）を仮定して，古典力学に基づく電子の運動方程式

$$m_e\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = -\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} + Gm_eM_n\right)\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{3}$$

を考えることにする。ここで，$\vec{r} = (x, y, z)$ は陽子の位置を原点とする電子の座標ベクトル，r はその大きさを表し，左辺の時間 t による 2 階微分は成分ごとの微分を示し，加速度ベクトルを表す。また，右辺の第 1 項は陽子と電子の間に働く静電気力を表し，ε_0 は真空の誘電率である。一方，右辺の第 2 項は陽子と電子の間に働く万有引力を表し，G は万有引力定数である。このとき，$e = 1.6 \times 10^{-19}$ C，$\varepsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12}$ $\mathrm{C^2/N/m^2}$，$m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg，$M_n = 1.7 \times 10^{-27}$ kg，$G = 6.7 \times 10^{-11}$ $\mathrm{Nm^2/kg^2}$ を用いて，(3) 式の右辺において，静電気力の効果に比べて万有引力の効果が無視できるほど小さいことを示せ。

問 2. 上の問 1 より，水素原子中の電子の運動方程式として

$$m_e\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{4}$$

を用い，これを基に，電子の軌道から水素原子の大きさを見積もることを考えてみる。ここで，電子の質量 m_e の次元は M であり，e^2/ε_0 の次元は，右辺が力の次元をもつことから，L^3MT^{-2} となる。運動方程式 (4) に現れる，次元をもった物理量を組み合わせることで電子の軌道に特徴的な長さを見積もれないかと考えるが，m_e の次元と e^2/ε_0（e^2 と ε_0 は常に対で現れる）の次元を乗除算的に組み合わせても長さの次元 L を作ることはできず，何かもう1つの物理量が必要である。1900年頃，熱輻射や光電効果の研究を通して，プランクやアインシュタインは，振動数 ν をもつ光を粒子（光子）の集まりと見なしたときの光子のエネルギーがプランク定数 $h = 6.6 \times 10^{-34}$ Js を用いて $h\nu$ と表されることを見出していた。そして，ニールス・ボーアはこのプランク定数が原子中の電子の運動に対しても重要なのではないかと考えた。このとき，エネルギーの次元が仕事＝力 × 距離の次元と同じであることを用いてプランク定数の次元が L^2MT^{-1} となることを示せ。また，長さの次元をもつように，プランク定数の次元，電子の質量の次元ならびに e^2/ε_0 の次元の乗除算的な組み合わせを求め，その値を計算することで，電子の軌道の大きさ（もしくは水素原子の大きさ）を概算せよ。

問 3. 水素原子が地球上にあるとき，電子には地球からの重力も働く。上の問2で得られた長さを陽子と電子の間の大体の距離であると見なして，電子に働く地球からの重力が陽子と電子の間に働く静電気力よりはるかに小さいことを示せ。但し，重力加速度を $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ とする。また，これら2つの力と，水素原子中の陽子と電子の間に働く万有引力との大小関係についても述べよ。

問 4. 太陽の周りの惑星の運動に関しては，太陽の質量を m_s，惑星の質量を m_p，その座標ベクトルを $\vec{r}$ とすると，$m_s \gg m_p$ として，ニュートンの運動方程式は

$$m_p \frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = -Gm_pm_s\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{5}$$

と表される。ところで，この運動（楕円軌道）に関しては，ケプラーの第3法則：「惑星が太陽の周りを1周する時間（公転周期）の2乗は軌道の長軸半径の3乗に比例する」が知られており，たとえば水星と海王星では軌道の長軸半径が約80倍，公転周期が約700倍異なるにも関わらず，この関係を満たす。運動方程式 (5) において，長さと時間をそれぞれの惑星の軌道の長軸半径 R と周期 P を基準にして測ることとし，$\vec{r} = R\vec{r'}$，$t = Pt'$ の関係式を通じて次元をもたない量 $\vec{r'}$，t' を導入する。このとき，いずれの惑星に対しても無次元変数 $\vec{r'}$，t' で表した運動方程式が同じ形になることを要請することにより，ケプラーの第3法則を導け。

【問題3】

次の説明を読んで，後の問1，問2に答えよ。

計算機では有限桁の数値しか扱えない。この制約のなかで大きな数値から小さな数値まで扱えるよう，一般に実数は浮動小数点と呼ばれる形式で表現される。これは 123.456 という数値を 1.23456×10^2 のように表現する科学的記数法に似た表記方法である。この 1.23456 に相当する部分は仮数，10^2 の 2 に相当する部分は指数と呼ばれ，通常，仮数の整数部は非ゼロかつ1桁となるよう指数が選ばれる。また，仮数，指数とも負の値をとりうることに注意する。さてここで，数値が科学記数法形式のデータとして扱われるような仮想的な計算機を考えよう。また，通常の計算機が有限桁の数値しか扱えないように，仮数は4桁に制限されるものとしよう。ただし，簡単のために，指数の桁数には制約がないものとしよう。この表記方法にそって，この仮想計算機内では，仮数が4桁に収まるよう（すなわち整数部が1桁，少数部が3桁となるよう）小数第4位は四捨五入されるとしよう（以後，この操作を「丸め操作」と呼ぶことにする)。たとえば，-0.12345 は -1.235×10^{-1} の数値データに変換される。また，2つの数値データに対する四則演算（加算，減算，乗算，除算）については，その計算途中では丸め操作は行われず，通常の四則演算を施した最終結果に対してのみ，仮数が4桁になるよう小数第4位が四捨五入されるものとしよう。たとえば，この仮想計算機内における 9.999×10^{-2} と 5.678×10^{-4} の加算の結果は，これらの数値を通常どおり加算した結果 1.005578×10^{-1} に対して丸め操作を行った 1.006×10^{-1} として得られる。

問1. 仮想計算機内で数値データ 1.234×10^0，2.345×10^{-2}，3.456×10^{-3} を加算する場合を考える。このとき，これら3つのうちから2つを選んで加算した（丸める操作を施した後の）結果を求め，さらに残りのデータを加算することにしよう。このとき，これらの数値データをどの順番で加算するかによって最終の計算結果がどう変わるのかを調べよ。また，その結果を考察し，数値計算の誤差を小さくするには，どのような順序で加算するのがよいかをその理由とともに述べよ。なお，数値データは正であると仮定してよい。

問2. 仮想計算機内で数値データ 1.234×10^{-1} から 1.233×10^{-1} を減算することを考えてみよう。減算前の2つの数値データの有効数字が仮数の桁数と等しいとしても，仮想計算機内での減算結果として得られる 1.000×10^{-4} の仮数のうち，有効桁数は実際には1桁のみで，小数点以下の3個の0は科学記数法形式に変換する際に追加されたものである。このことから，値が近い数値データ同士の減算においては，有効数字としての桁は減少することがわかる。このことを考慮して，仮想計算機により実数係数 a，b，c をもつ x の2次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

の解を「2次方程式の解の公式」を使って計算する際，どのような場合に計算結果の誤差が大きくなるのかをその理由とともに述べよ。また，誤差を小さくするには，どのような工夫を施して計算すればよいかをその理由とともに述べよ。なお，上記の2次方程式は実数解をもつものとする。また，仮想計算機内における平方根の計算についても仮数が4桁になるよう小数第4位が四捨五入されるものとする。