No.15 仮説検定

NAKADA Masayuki

Kobe University Secondary School

December 23, 2021

仮説検定の考え方

例題 1

コインを 20 枚投げたところ，そのうち 15 回で表が出た．この結果から，コインは（例えば歪みや細工により）裏よりも表が出やすいと判断してよいだろうか．

例題 1

コインを 20 枚投げたところ，そのうち 15 回で表が出た．この結果から，コインは（例えば歪みや細工により）裏よりも表が出やすいと判断してよいだろうか．

この問題に対する答えは，次のうちどちらかとなるであろう．

0. 表と裏の出やすさは等しい（公平）
1. 表と裏の出やすさは等しくない（不公平）

例題 1

コインを 20 枚投げたところ，そのうち 15 回で表が出た．この結果から，コインは（例えば歪みや細工により）裏よりも表が出やすいと判断してよいだろうか．

この問題に対する答えは，次のうちどちらかとなるであろう．

0. 表と裏の出やすさは等しい（公平）
1. 表と裏の出やすさは等しくない（不公平）

このように，母集団に対する仮説を立て，標本に基づいてその成否を統計的に検証することを，**仮説検定**という．

仮説検定のしくみ

このコインを1回投げて表が出る確率を p とする．このとき，20回投げて表の出る回数 X は，二項分布 $B(20, p)$ に従う．先の2つの仮定は，母数 p を用いて以下の形に書き換えられる．

帰無仮説 H_0 $p = 0.5$

対立仮説 H_1 $p \neq 0.5$

仮説検定では，「ひょっとしたら $p \neq 0.5$ なんじゃないか」という考えに基づき，

もし仮に $p = 0.5$ だとすると, 観測事実（20回中15回表）がどの位稀なことか

という背理法に沿って検証を行う．よって，

1. 一旦帰無仮説 H_0 を仮定し
2. 観測事実の起こる確率を算出し
3.
   - 観測事象が「十分稀である」と言えるならば，帰無仮説 H_0 を**棄却**し，対立仮説を**採択**する．
   - 観測事象が「十分稀である」とは言えないならば，帰無仮説 H_0 は棄却されない．

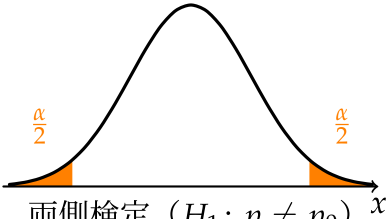
有意水準

1. 一旦帰無仮説 H_0 を仮定し
2. 観測事実の起こる確率を算出し
3.
   - 観測事象が「十分稀である」と言えるならば，帰無仮説 H_0 を棄却し，対立仮説を採択する．
   - 観測事象が「十分稀である」とは言えないならば，帰無仮説 H_0 は棄却されない．

このアルゴリズムにおいては，観測事象が「十分稀である」（理論値との差が偶然とは思えないほど有意にある）と判断する閾値となる確率の設定が必要である．この確率のことを，仮説検定では**有意水準**という．

両側検定，片側検定

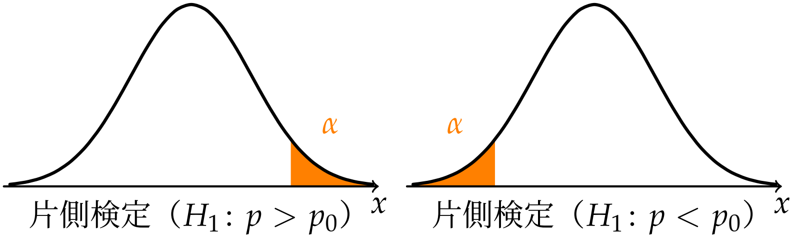
例題のコイントスにおいて，表裏の出方が公平であるか否か，すなわち，p と 0.5 に差があるか否かを検定したい場合，観測事実（表の出た回数）が極端に多くても少なくても，帰無仮説 H_0 を棄却すべきである．この場合，**両側検定**を用いる．両側検定では，有意水準 α を上位 $\frac{\alpha}{2}$ と下位 $\frac{\alpha}{2}$ に分けて閾値を設定する．



両側検定（H_1: $p \neq p_0$）

両側検定，片側検定（続き）

表が出やすくなるようにコインに細工を仕掛けた結果，本当に表が出やすくなっているのか否か，すなわち p が 0.5 より大きくなっているか否かを検定したい場合，観測事実（表の出た回数）が有意に大きいときに，帰無仮説 H_0 を棄却すべきである．この場合，**片側検定**を用いる．



※片側検定では，有意水準 α をそのまま用いるので，両側検定に比べて帰無仮説 H_0 を棄却し易い．その結果，本当は十分な有意差がない調査からも有意な分析結果を導き出してしまうことがある．それを防ぐため，業界によっては，統計分析における仮説検定の有意水準を，両側と片側で別に設定しているところもある（e.g. 医療統計における「臨床試験のための統計的原則」）．

仮説検定を用いた解答

例題 1

コインを 20 枚投げたところ，そのうち 15 回で表が出た．この結果から，コインは（例えば歪みや細工により）裏よりも表が出やすいと判断してよいだろうか．

帰無仮説 $H_0: p = 0.5$ を対立仮説 $H_1: p \neq 0.5$ に対して，有意水準 5% で両側検定する．
帰無仮説 $H_0: p = 0.5$ の下で，表の出る回数 X は二項分布 $B(20, 0.5)$ に従うはずである．このとき，

$$P(X \geqq 15) \fallingdotseq 0.021 < 0.025 = \frac{0.05}{2} \quad \text{(両側検定だから，有意水準 0.05 の半分と比較)}$$

であるから，帰無仮説 $H_0: p = 0.5$ を信頼するには無理がある．よって，帰無仮説 $H_0: p = 0.5$ は有意水準 5% で棄却される． □

例題 1-bis

例題 1 とは別のコインを 20 枚投げたところ，そのうち 12 回で表が出た．この結果から，コインは（例えば歪みや細工により）裏よりも表が出やすいと判断してよいだろうか．有意水準 5% で両側検定せよ．

例題 1-bis

例題 1 とは別のコインを 20 枚投げたところ，そのうち 12 回で表が出た．この結果から，コインは（例えば歪みや細工により）裏よりも表が出やすいと判断してよいだろうか．有意水準 5% で両側検定せよ．

帰無仮説 $H_0\colon p = 0.5$ を対立仮説 $H_1\colon p \neq 0.5$ に対して，有意水準 5% で両側検定する．
帰無仮説 $H_0\colon p = 0.5$ の下で，表の出る回数 X は二項分布 $B(20, 0.5)$ に従うはずである．このとき，

$$P(X \geqq 12) \fallingdotseq 0.252 > 0.025$$

であるから，帰無仮説 $H_0\colon p = 0.5$ を退けるほどの十分に稀な事象ではない．よって，帰無仮説 $H_0\colon p = 0.5$ は有意水準 5% で棄却されない． □

※帰無仮説 H_0 が棄却されなかったからといって，帰無仮説を積極的に支持してよいということにはならない．得られた調査結果が，帰無仮説 H_0 と矛盾しないことが示されたのみである．

標本平均と t 分布

母平均 μ と母分散 σ^2 が未知である正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う母集団から，大きさ n の標本 $[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ を抽出する．

標本平均 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ について，$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ であるから，$\overline{X}$ の標準化

$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う．

抽出した標本 $[x_1, \ldots, x_n]$ からは，母平均 μ と母分散 σ^2 についての情報を同時に知ることはできない．（仮説検定，本当は区間推定でも）母平均 μ を調べたい場合，未知の母分散 σ^2 を，不偏標本分散 $\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$（cf. No.13）で代用する方が現実的である．

不偏標本分散 $\hat{S}^2$ で代用した「標準化」変数

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\hat{S}/\sqrt{n}}$$

は，**自由度 $n-1$ の t 分布 t_{n-1}** に従う．

（参考）t 分布の構造と自由度について

不偏標本分散について，

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \overline{x}}{\sigma}\right)^2 \quad \therefore \ \frac{\hat{s}^2(n-1)}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \overline{x}}{\sigma}\right)^2$$

であり，$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$（自由度 $n-1$ のカイ自乗分布，cf. No.13）に従う．
よって，

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\hat{S}^2/\sqrt{n}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\hat{S}^2(n-1)}{\sigma^2}\Big/(n-1)}} \sim \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2_{n-1}/(n-1)}} \quad \text{（標語的に）}$$

特に，分母に登場するカイ自乗分布の自由度が n でなく $n-1$ であることから，t 分布としての自由度も $n-1$ となる． □