誤差論

統計学ミニマム

園田 英徳

理学研究科物理学専攻

2017年Q1&2　物理学実験　木曜日クラス

http://www2.kobe-u.ac.jp/~hsonoda/#2017PhysicsLabs

目次

有効数字の取扱い

- 測定量が最確値 x_m とその誤差 σ_m によって

$$x_m \pm \sigma_m$$

と得られたとしよう．（この意味はあとで説明する．）

- x_m の有効数字の桁数は σ_m によって決まる．　σ_m は1桁ないし2桁.

測定値	誤差	最確値の有効数字
$1.23 \pm 0.45\,\mathrm{m}$	2桁	3桁
$(5.343 \pm 0.032) \times 10^5\,\mathrm{kW}$	2桁	4桁
$1.2 \pm 0.5\,\mathrm{kg}$	1桁	2桁
$(3.4 \pm 0.2) \times 10^5\,\mathrm{m/s}$	1桁	2桁

Table 1: 物理量には単位をつける!

- 悪い例 — どこが悪いか?

悪い例	訂正後
$1.23\cancel{2} \pm 0.045\,\mathrm{m}$	$1.232 \pm 0.045\,\mathrm{m}$ または $1.23 \pm 0.05\,\mathrm{m}$
$1.23 \pm 0.4\,\mathrm{m}$	$1.2\cancel{3} \pm 0.4\,\mathrm{m}$

- 近似計算3 つのルール

第1 則 — 計算結果の有効数字の桁数

$*$ **和**と**差**の場合，最後の桁がもっとも高いものの最後の桁に揃える．

$*$ **積**と**商**の場合，計算のもとである測定値の桁数のうち，もっとも少ないものに等しくとる．

$$
\begin{array}{rl}
 & 1.23 \\
- & 0.345 \\
\hline
 & 0.88\cancel{5} \\
 & 0.89
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
 & 1.23 \\
\times & 0.45 \\
\hline
 & 0.55\cancel{3}\cancel{5}
\end{array}
$$

第2 則 — 計算に使う**定数**の桁数は，測定値の桁数より1 つ多くとる．

$*$ 電卓に組み込まれている定数（π や e など）は，そのまま使ってよい．

第3 則 — 計算途中の結果の桁数は，測定値の有効桁数より 1 桁多くとる．

* 電卓やパソコンで計算する時は，途中結果をいちいち四捨五入する必要はない．最後の結果を表すとき，有効数字を考慮すればよい．

電圧 $V = 1.013$ ボルト（ 4 桁）
電流 $I = 0.0051$ アンペア（ 2 桁）

オームの法則 $R = V/I$ より

抵抗値 $R = 198.6274\cdots\Omega \simeq 2.0 \times 10^2$ オーム（ 2 桁）

同一測定を何回も繰り返して統計誤差を小さくする場合は，
第1 ～3 則よりもさらに1 桁多くとる．

統計的推論のまとめ

1. ある物理量xを N 回測定して測定値$x_i\,(i=1,\cdots,N)$を 得たとしよう.

最確値	$\bar{x} \equiv \frac{x_1+\cdots+x_N}{N}$
分散	$s^2 \equiv \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^2 - N\bar{x}^2\right)$
誤差	$\frac{s}{\sqrt{N}}$

2. 測定結果

$$\boxed{\bar{X} \pm \frac{s}{\sqrt{N}}}$$

もちろん単位をつける.

確率分布

1. サイコロを振って，1の目が出る確率は $\frac{1}{6}$，1の目の出ない確率は $\frac{5}{6}$.

2. サイコロを N 回振って，1の目の出る回数の平均は,

$$N \times \frac{1}{6} = \frac{N}{6}$$

3. 1の目が n 回出る場合の数は，${}_N C_n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$．よって n 回出る確率は

$$P_n = {}_N C_n \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}$$

4. 2 項分布 — $0 < p < 1$として,

$$P_n = {}_N C_n \, p^n (1-p)^{N-n} \qquad (n = 0, 1, \cdots, N)$$

平均 $\langle n \rangle \equiv \sum_{n=0}^{N} nP_n = Np$

分散 $\left\langle (n - \langle n \rangle)^2 \right\rangle \equiv \sum_{n=0}^{N} (n - Np)^2 P_n = Np(1-p)$

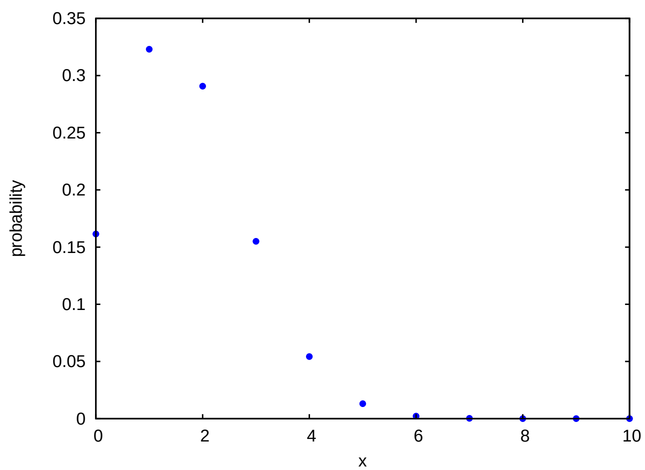


Figure 1: $p = \frac{1}{6}, N = 10$
平均 $\frac{5}{3}$, 分散 1.18^2

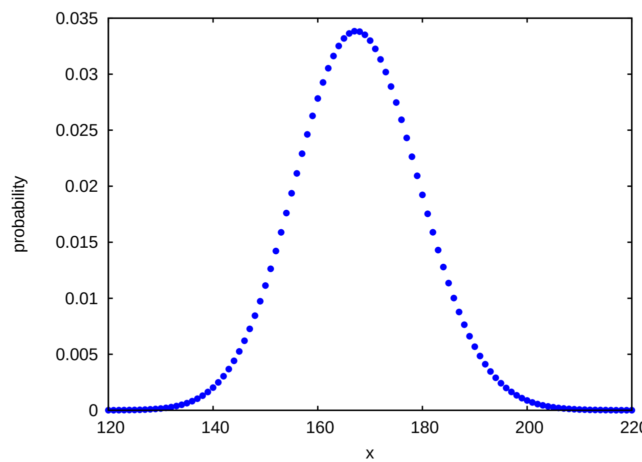


Figure 2: $p = \frac{1}{6}, N = 1000$
平均 167, 分散 11.8^2

5. **Gauss 分布** — 平均と 分散だけで決まる **連続な確率分布.**

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$x \in [x_0, x_0 + \Delta x]$ である確率は $p(x_0)\Delta x$ で与えられる.

$$\begin{cases} \langle x \rangle & = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, p(x) x = \mu \\ \left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle & = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, p(x)\, (x-\mu)^2 = \sigma^2 \end{cases}$$

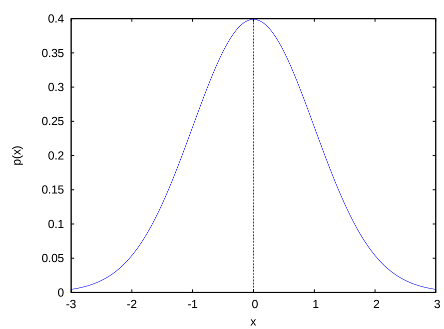


Figure 3: $\mu = 0$, $\sigma = 1$ の Gauss 分布

6. 2 項分布も $N \to \infty$ で Gauss 分布（平均 Np，分散 $Np(1-p)$）になる．

$$P(x) = \frac{N!}{x!(N-x)!} p^x (1-p)^{N-x} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi Np(1-p)}} \exp\left(-\frac{(x-Np)^2}{2Np(1-p)}\right)$$

7. 中心極限定理 (C. F. Gauss) — $x_i\,(i=1,\cdots,N)$ がそれぞれ平均 μ_i，分散 σ_i^2 の分布（Gauss とは限らない）をしているとき，

$$x = x_1 + \cdots + x_N$$

は，$N \gg 1$ であれば，平均 $\sum_{i=1}^N \mu_i$，分散 $\sigma^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2$ の Gauss 分布に従う．

8. <u>測定量は，Gauss 分布に従うと考えられる．</u>

なぜ複数回測定するのか?

1. 物理量 x は平均 μ，分散 σ^2 の Gauss 分布に従うとしよう．

$$\begin{cases} \langle x \rangle &= \mu \\ \left\langle (x-\mu)^2 \right\rangle &= \sigma^2 \end{cases}$$

2. N 回測定する．1 回めの測定値を x_1，2 回めの測定値を x_2，...とする．

$$\langle x_i \rangle = \mu, \quad \left\langle (x_i - \mu)^2 \right\rangle = \sigma^2$$

3. 平均値 $\bar{x} \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ はどう分布するか? 平均は同じ．

$$\langle \bar{x} \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \langle x_i \rangle = \mu$$

問題は分散である．まず

$$\left\langle (x_i-\mu)^2 \right\rangle = \left\langle x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2 \right\rangle = \left\langle x_i^2 \right\rangle - 2\mu \underbrace{\langle x_i \rangle}_{=\mu} + \mu^2 = \left\langle x_i^2 \right\rangle - \mu^2$$

に注意する．それから $i \neq j$ のとき

$$\langle x_i x_j \rangle = \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle = \mu^2$$

に注意する．$\bar{x}$ の分散は次のように求められる．

$$\begin{aligned}
\left\langle (\bar{x}-\mu)^2 \right\rangle &= \left\langle \bar{x}^2 \right\rangle - \mu^2 \\
&= \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} \left\langle x_i^2 \right\rangle + 2\sum_{i \neq j} \langle x_i x_j \rangle \right) - \mu^2 \\
&= \frac{1}{N^2}\Big(N(\sigma^2+\mu^2) + N(N-1)\mu^2 \Big) - \mu^2 = \frac{1}{N}\sigma^2
\end{aligned}$$

つまり 分散は N 分の 1 に減少する．

4. <u>平均値 $\bar{x}$ は平均 μ，分散 $\frac{1}{N}\sigma^2$ の Gauss 分布に従う．</u>

5. 測定値から σ^2 をどう 求めるか?

$$\boxed{s^2 \equiv \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\bar{x}^2\right)}$$

を σ^2 の代わりに使う．$\langle x_i^2 \rangle = \sigma^2 + \mu^2$,　$\langle \bar{x}^2 \rangle = \frac{1}{N}\sigma^2 + \mu^2$ を使って，

$$\begin{aligned}\left\langle s^2 \right\rangle &= \frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\left\langle x_i^2\right\rangle - N\left\langle \bar{x}^2\right\rangle\right) \\ &= \frac{1}{N-1}\left(N\left(\sigma^2+\mu^2\right) - N\left(\frac{1}{N}\sigma^2+\mu^2\right)\right) = \sigma^2\end{aligned}$$

を得る．s^2 の分母は N でなく，$N-1$ であることに注意.

統計的推論

既知の分散σ^2をもつ正規分布に従う物理量xを考えよう．[1]

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

1. 仮設検定 — μの値についての仮設を検定する

   測定によって得られたx_mを使って，μの値についての仮設を受け入れるかどうか決める.

2. 区間推定 — μの値がある区間にあることを推定する

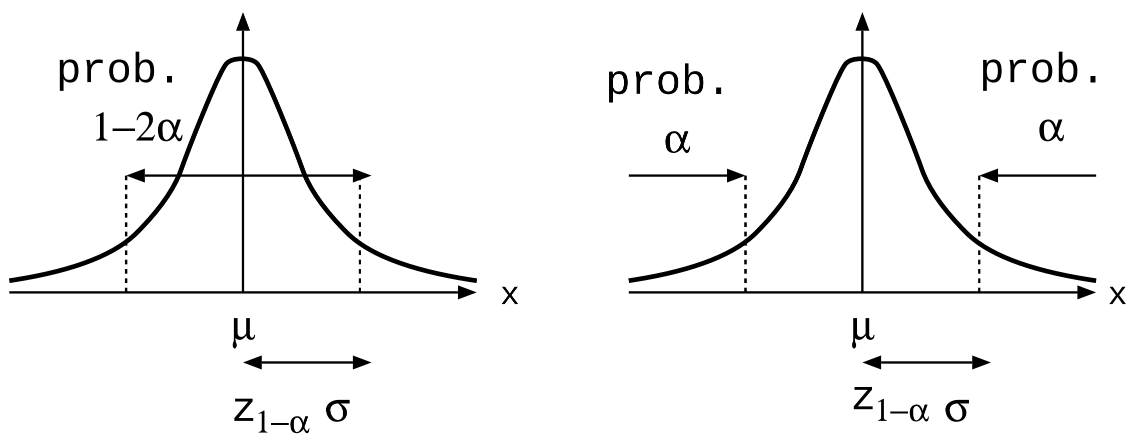
   得られたx_mを使って，μの存在する区間を推定する.

---

[1]実際，xはN回測定の平均$\bar{x}$のことで，barは省略している．σ^2はそれぞれの測定値の分散（s^2で代用する）をNで割った$\frac{s^2}{N}$のことである.

1. $x > \mu + z_{1-\alpha}\sigma$である確率が，$\alpha$となるように係数$z_{1-\alpha}$を決めると，

$$\int_{-\infty}^{\mu+z_{1-\alpha}\sigma} dx\, P(x) = 1 - \alpha$$



2. $P(x)$は平均μに対して対称的である（ $P(\mu+y) = P(\mu-y)$）から

$$\int_{-\infty}^{\mu-z_{1-\alpha}\sigma} dx\, P(x) = \int_{\mu+z_{1-\alpha}\sigma}^{\infty} dx\, P(x) = \alpha$$

3. $z_{1-\alpha}$ の例

$z_{1-\alpha}$	100α %
1	16%
2	2.3%
3	0.14%
1.645	5%
1.960	2.5%
2.326	1%

Table 2: μ より 1σ 以上大きい確率は 16%，2σ 以上大きい確率は 2.3%．上の 5%は，μ より 少なくとも 1.65σ 以上大きい．

4. $\alpha \ll 1$を決めて，xを二つの領域に分ける．

A 領域（ 確からしい領域）確率$1-2\alpha$をもつ，$|x-\mu| < z_{1-\alpha}\sigma$

B 領域（ 確からしくない領域）確率が2αしかない，$|x-\mu| > z_{1-\alpha}\sigma$

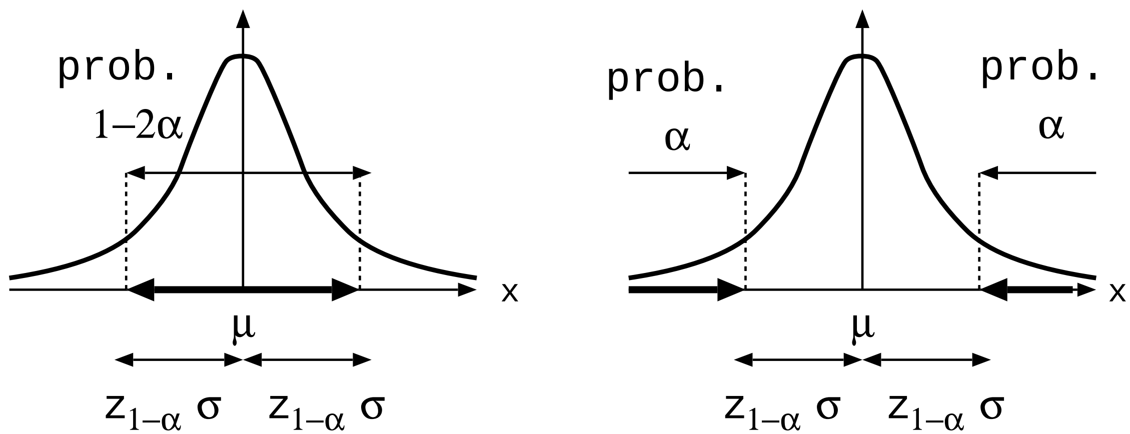


Figure 4: A 領域　　　　B 領域

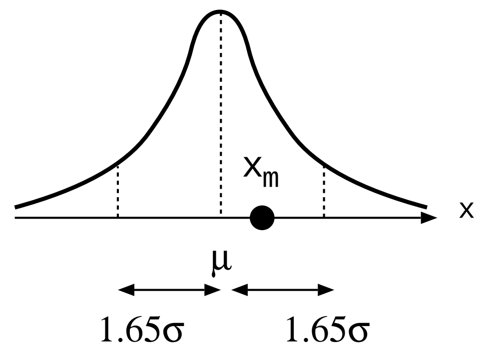
5. 推定の原理 — 測定値がA領域にあるようなμを受け入れ，B領域にあるようなμを拒絶する．

仮設検定

平均値はμであるという仮設のもと，測定値x_mが得られた．

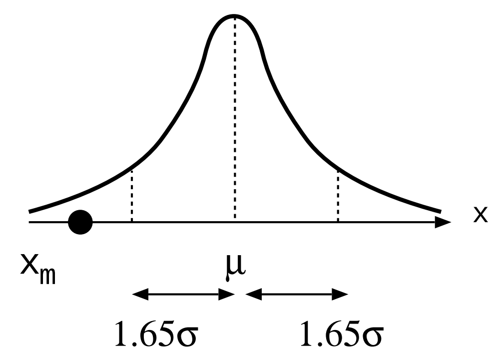
1. $|\mu - x_m| < 1.65\sigma$

   得られたx_mはA領域に入る．仮説を有意水準10%で受け入れる．



2. $|\mu - x_m| > 1.65\sigma$

   得られたx_mはB領域に入る．仮説を有意水準10%で拒絶する．



区間推定

測定値x_mが得られたとする．区間

$$R \equiv [x_m - \sigma, x_m + \sigma]$$

を考える．

1. $\mu \in R$の場合

   $|\mu - x_m| < \sigma$となって，測定値x_mはμのA領域に入る．

2. $\mu \notin R$の場合

   $|\mu - x_m| > \sigma$となって，測定値x_mはμのB領域に入る．

μは区間Rにあると**信頼度**68%で推定する．σを1.65σとすれば，信頼度は90%になり，1.96σとすれば，信頼度は95%になる．

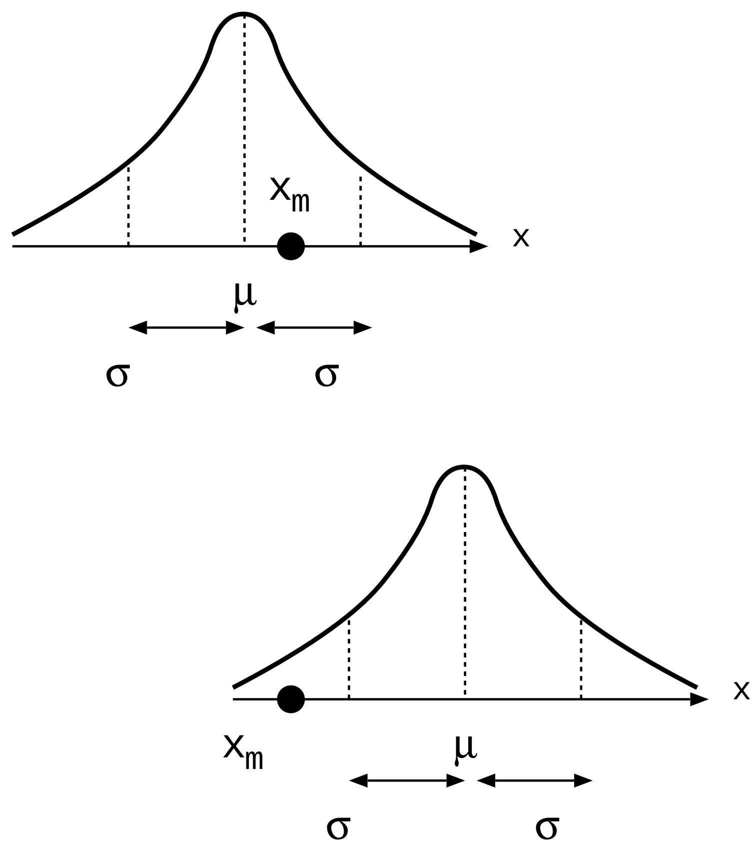


Table 3: 上が$\mu \in R$の場合，下が$\mu \notin R$の場合

σ^2が未知の場合

いままでx_mの従う正規分布の分散σ^2は，$\frac{s^2}{N} = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_m)^2$で代用してきた．もっと正確には以下のようにできる.（講義では割愛．興味のある人への補足.）

x_mはN回の測定値$x_i\,(i = 1, \cdots, N)$の平均である.

$$x_m \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

それぞれの測定値x_iが平均μ，分散σ^2の正規分布に従うとき，x_mは平均μ，分散$\frac{1}{N}\sigma^2$の正規分布に従う. σ^2が未知であるときは，標本分散を

$$s^2 \equiv \frac{1}{N-1}\sum_{i}(x_i - x_m)^2$$

で定義すると，

$$t \equiv \frac{x_m - \mu}{\frac{1}{\sqrt{N}}\, s}$$

は自由度 $N-1$ の t-分布に従う.[2]

$$P(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{\sqrt{\pi(N-1)}\,\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{N-1}\right)^{-\frac{N}{2}}$$

N が十分大きければ， t-分布は平均 0，分散 1 の正規分布に等しくなる．よって N が大きいときは，x_m は平均 μ，分散 $\frac{1}{N}s^2$ の正規分布に従うと考えてよく，上で説明した仮設検定，区間推定がそのまま使える．

つまり

[2] ここで $\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty dy\, y^{x-1} \exp(-y)$ はガンマ関数. $n = 0, 1, 2, \cdots$ のとき $\Gamma(n+1) = n!$.

- $|x_m - \mu| < z_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{N}}$ であれば，平均値の仮設 μ を有意水準 2α で受け入れ，
- $\mu \in \left[x_m - z_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{N}}, x_m + z_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{N}}\right]$ と信頼度 $1-2\alpha$ で区間推定する．

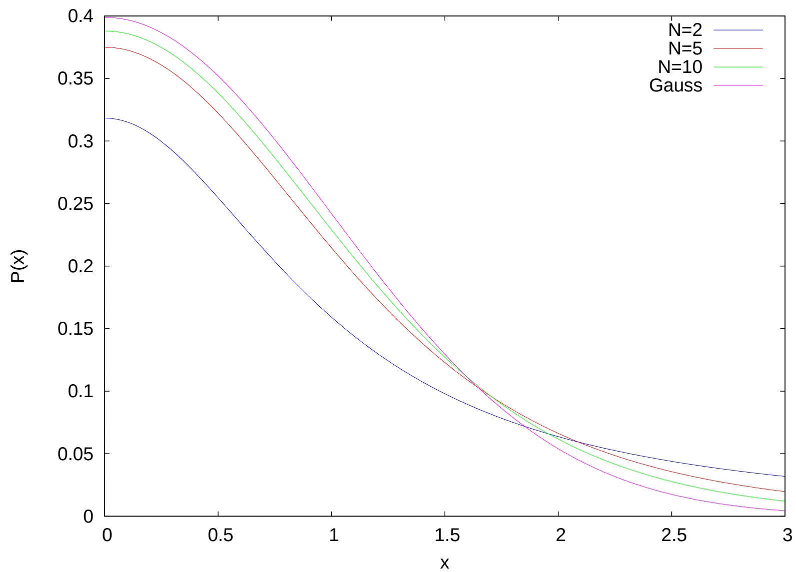


Figure 5: t-分布と正規分布の比較

加重平均

1. 同じ物理量を2 つの方法で測ったとする.

方法	最確値	分散
1	$\bar{x}_1$	σ_1^2
2	$\bar{x}_2$	σ_2^2

2. 平均の平均を考える.

$$\bar{x} \equiv a\bar{x}_1 + (1-a)\bar{x}_2$$

3. この分散は

$$a^2\sigma_1^2 + (1-a)^2\sigma_2^2.$$

4. これを最小化するように a を選んで得られるのが、**加重平均**.

$$\bar{x} \equiv \frac{\frac{1}{\sigma_1^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}}\bar{x}_1 + \frac{\frac{1}{\sigma_2^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}}\bar{x}_2 = \boxed{\frac{\frac{\bar{x}_1}{\sigma_1^2}+\frac{\bar{x}_2}{\sigma_2^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

5. 加重平均 $\bar{x}$ の分散は

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \boxed{\frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}}} < \mathrm{Min}(\sigma_1^2, \sigma_2^2)$$

6. $\bar{x}_1$ と $\bar{x}_2$ の加重平均をとるのに意味のあるのは

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| < \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \quad \text{のときだけ.}$$

誤差の伝搬

1. aと bを測定して，物理量$c = f(a, b)$を決めることを考えよう．

$$a = \mu_1 + u_1, \quad b = \mu_2 + u_2$$

ここで$\langle u_1^2 \rangle = \sigma_1^2, \langle u_2^2 \rangle = \sigma_2^2$.

2. u_1, u_2は微小と仮定すると，Taylor 近似により

$$\begin{aligned} c = f(a, b) &= f(\mu_1 + u_1, \mu_2 + u_2) \\ &\simeq f(\mu_1, \mu_2) + \frac{\partial f(\mu_1, \mu_2)}{\partial \mu_1} u_1 + \frac{\partial f(\mu_1, \mu_2)}{\partial \mu_2} u_2 \end{aligned}$$

3. <u>cの平均</u>は，$\langle u_1 \rangle = 0, \langle u_2 \rangle = 0$より

$$\langle c \rangle = f(\mu_1, \mu_2)$$

4. <u>cの分散</u>は，

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(c - f(\mu_1, \mu_2)\right)^2 \right\rangle &= \left\langle \left(\partial_{\mu_1} f \cdot u_1 + \partial_{\mu_2} f \cdot u_2\right)^2 \right\rangle \\
&= \left(\partial_{\mu_1} f\right)^2 \left\langle u_1^2 \right\rangle + \left(\partial_{\mu_2} f\right)^2 \left\langle u_2^2 \right\rangle \\
&\qquad + 2\partial_{\mu_1} f \cdot \partial_{\mu_2} f \underbrace{\langle u_1 u_2 \rangle}_{=0} \\
&= \left(\partial_{\mu_1} f\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\partial_{\mu_2} f\right)^2 \sigma_2^2
\end{aligned}$$

5. 面積$A = L_1L_2$の例.

L_1の分散σ_1^2とL_2の分散σ_2^2とする．$\frac{\partial A}{\partial L_1} = L_2$，$\frac{\partial A}{\partial L_2} = L_1$より，
Aの分散は,

$$\sigma_A^2 = L_2^2\sigma_1^2 + L_1^2\sigma_2^2$$

と与えられる.

したがって，先週ノギスの実習で測定した名札の面積の場合,

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.0025\,\mathrm{cm}$$

だから，面積$A = L_1L_2$の分散の平方根は

$$\sigma_A = \sqrt{L_1^2 + L_2^2} \times 0.0025\,\mathrm{cm}$$

となる.