誤差論

統計学ミニマム

園田 英徳

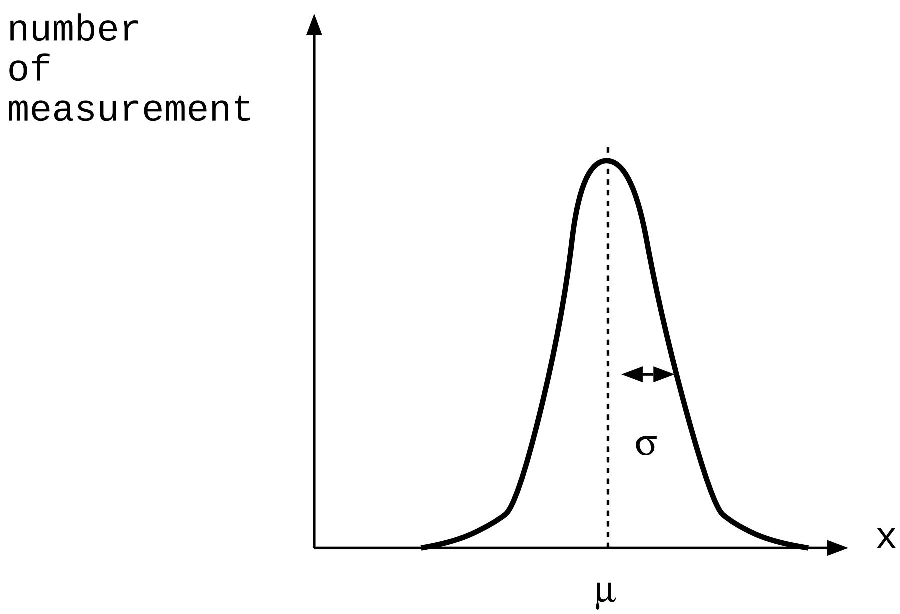
理学研究科物理学専攻

2011年前期　物理実験　水曜日クラス

目次

誤差とはなにか？

- ある物理量を同じ条件の下で何回も何回も測定すると，測定値は常に同じではなく，図のように平均値（真の値ともよばれる）μのまわりに幅（**誤差**）σをもって分布する．



- 有限回の測定により，どうやってμを求めるかが問題である.

- 多数回の測定をすれば，μの不定性は誤差σよりも小さくできる.

- 誤差σの起源は，ふたつに分類される.

  1. **統計誤差** — 不定の事情によって偶然に起こる誤差.
     - 必然的偶発誤差 — 測定の環境や条件など，数多くの互いの無関係な微小な揺らぎがたくさん積み重なって生じる.
     - 過失誤差 — 過失による.
  2. **系統誤差** — 一定の原因によって，繰り返し現れる誤差. 原因が分かれば，除去できる.
     - 器械誤差 — 器械の狂いや，零点の未調整による.
     - 個人誤差 — 測定者の癖（多めに読むなど）による.
     - 理論誤差 — 理論の誤り，または近似の悪さによる.

- 統計誤差の存在により，測定は統計現象と考えられる.
- 以下，誤差σとしては，この統計誤差のことだけを考えよう.
  - 確率の支配する統計現象の一般的な性質について学ぶ必要がある.
- 統計現象の話をする前にまず，実用上重要な**有効数字**のとりあつかいについてまとめよう.

有効数字の取扱い

- 測定量が
$$x_m \pm \sigma_m$$
の区間内に得られたとしよう．（**最確値**x_mとその**誤差**σ_mについては，あとで詳しく解説する.）

- σ_mによって有効数字の桁数が決まる． 通常σ_mは１桁ないし２桁とる.

例
$$\begin{aligned}
1.23 &\pm 0.45\,\mathrm{m} \\
1.2 &\pm 0.5\,\mathrm{kg} \\
(3.4 &\pm 0.2) \times 10^5\,\mathrm{m/s} \\
(5.343 &\pm 0.032) \times 10^5\,\mathrm{kW}
\end{aligned}$$

物理量には単位をつけるのを忘れぬように.

- Howto 近似計算

第１則 — 計算結果の有効数字の桁数
  * 和と差の場合，最後の桁がもっとも高いものの最後の桁に揃える．
  * 積と商の場合，計算のもとである測定値の桁数のうち，もっとも少ないものに等しくとる．

$$
\begin{array}{rr}
 & 1.23 \\
- & 0.345 \\
\hline
 & 0.88\cancel{5} \\
 & 0.89
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr}
 & 1.23 \\
\times & 0.45 \\
\hline
 & 0.55\cancel{3}\cancel{5}
\end{array}
$$

第２則 — 計算に使う定数の桁数は，測定値の桁数より１つ多くとる．
  * 電卓に組み込まれている定数（π や e など）は，そのまま使ってよい．

第３則 — 計算途中の結果の桁数は，測定値の有効桁数より１桁多くとる．

＊ 電卓やパソコンで計算する時は，途中結果をいちいち四捨五入する必要はない． 最後の結果を表すとき，有効数字を考慮すればよい．

電圧	$V = 1.013$ Volts （４桁）
電流	$I = 0.0051$ Ampere （２桁）
オームの法則	$R = V/I$
抵抗値	$R = 198.6274\cdots \simeq 2.0 \times 10^2\,\Omega$ （２桁）

同一測定を何回も繰り返して統計誤差を小さくする場合は，第１～３則よりもさらに１桁多くとる．

統計現象の話をはじめよう． まずは確率分布について．

確率分布の平均値と分散

- **確率分布**

1. **離散的分布** $(i = 1, \cdots, n)$ — n 個の事象

$$P_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

例：サイコロの目 $i = 1, \cdots, 6$

$$P_i = \frac{1}{6}$$

2. **連続的分布** $(a < x < b)$

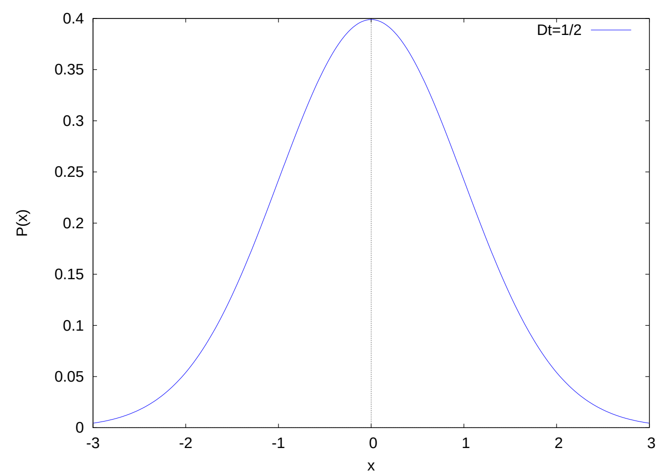
$$P(x) \geq 0, \quad \int_a^b dx\, P(x) = 1$$

xが微小区間$[x_0, x_0 + \Delta x]$にある確率は$P(x_0)\Delta x$で与えられる.

例：拡散現象 — 気体分子が時間tの間に得る変位xの確率分布は，拡散係数をDとして,

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

$$(a = -\infty, b = +\infty)$$



- **平均値**

$$\langle f \rangle \equiv \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} f_i P_i & \text{離散的} \\ \int_a^b dx\, f(x) P(x) & \text{連続的} \end{cases}$$

例

– サイコロの目i

$$\begin{aligned} \langle i \rangle &= \frac{1}{6}(1+2+\cdots+6) = \frac{7}{2} \\ \left\langle i^2 \right\rangle &= \frac{1}{6}(1+4+\cdots+36) = \frac{91}{6} \end{aligned}$$

– 気体分子が時間tの間に得る変位x

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x\, P(x) = 0 \\ \left\langle x^2 \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2\, P(x) = 2Dt \end{aligned}$$

- **分散**

$$\sigma^2 \equiv \left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \langle x \rangle)^2 P_i & \text{離散的分布} \\ \int_a^b dx\, (x - \langle x \rangle)^2 P(x) & \text{連続的分布} \end{cases}$$

は，平均値からの「ばらつき」を表す．

例

– サイコロふり

$$\left\langle (i - \langle i \rangle)^2 \right\rangle = \frac{1}{6} \left(\left(1 - \frac{7}{2} \right)^2 + \cdots + \left(6 - \frac{7}{2} \right)^2 \right) = \frac{35}{12}$$

– 分子の拡散

$$\left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle x^2 \right\rangle = 2Dt$$

- **分散についての重要な等式**

$$\sigma^2 \equiv \left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle x^2 - 2\langle x \rangle x + \langle x \rangle^2 \right\rangle$$
$$= \left\langle x^2 \right\rangle - 2\langle x \rangle \langle x \rangle + \langle x \rangle^2 = \boxed{\left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2}$$

- **独立性** — 確率変数x, yが独立であるとは

$$P(x, y) = P_1(x) \cdot P_2(y)$$

であることをいう．　したがって

$$\langle f(x) g(y) \rangle = \langle f(x) \rangle \cdot \langle g(y) \rangle$$

- **平均と分散の加法性** — 独立な確率変数 x, y の平均を μ, μ'，分散を σ^2, σ'^2 とする.

  1. 和の平均は，平均の和.

  $$\langle x+y \rangle = \langle x \rangle + \langle y \rangle = \mu + \mu'$$

  2. 和の分散は，分散の和.

  $$\begin{aligned} \left\langle (x+y-\mu-\mu')^2 \right\rangle &= \left\langle (x-\mu)^2 \right\rangle + \left\langle (y-\mu')^2 \right\rangle \\ &\quad +2 \left\langle (x-\mu)(y-\mu') \right\rangle \\ &= \sigma^2 + \sigma'^2 \\ &\quad +2 \underbrace{\langle x-\mu \rangle}_{=0} \cdot \underbrace{\langle y-\mu' \rangle}_{=0} \\ &= \sigma^2 + \sigma'^2 \end{aligned}$$

誤差論と統計学の対応表

誤差論と統計学では同じものを別の名で呼ぶことがある.

誤差論		統計学	
最確値	$x_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$	標本平均	$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
2 乗誤差	$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_m)^2$	標本分散	$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$
最確値の誤差	$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$	信頼度68%の区間推定	$\left[\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{N}}, \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{N}}\right]$
測定値	$x_m \pm \sigma_m$		

以下の説明では，統計学の語法にしたがう．　教科書の付録を参照するに当たっては，上の対応表を使うと便利.

標本平均と標本分散

- **標本平均** — ある物理量を N 回測定して得られた測定値を $x_i(i = 1, \cdots, N)$ とする．ここで $x_1, \cdots, x_N$ は，互いに独立だが，すべておなじ確率分布（平均値 μ，分散 σ^2）に従うとする．

$$\langle x_i \rangle = \mu, \quad \left\langle (x_i - \mu)^2 \right\rangle = \left\langle x_i^2 \right\rangle - \mu^2 = \sigma^2$$

標本平均を

$$\boxed{\bar{x} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i}$$

と定義する．

- 標本平均の二つの性質

  N 回測定して標本平均$\bar{x}$を求める作業を何回も何回も（無数回）繰り返すことを考える． 以下

$$\langle x_i \rangle = \mu, \quad \langle x_i^2 \rangle = \mu^2 + \sigma^2 \quad (i = 1, \cdots, N)$$

  を使う.

  1. $\bar{x}$ の平均（期待値）

$$\langle \bar{x} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\langle x_i \rangle}_{=\mu} = \frac{1}{N} N\mu = \mu$$

2. $\bar{x}$の分散

$$\left\langle (\bar{x}-\mu)^2 \right\rangle = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\langle (x_i-\mu)(x_j-\mu)\rangle$$

ここで$i \neq j$のとき$\langle (x_i-\mu)(x_j-\mu)\rangle = \langle x_i-\mu\rangle \cdot \langle x_j-\mu\rangle = 0$であること（測定の独立性）を使うと,

$$\left\langle (\bar{x}-\mu)^2 \right\rangle = \frac{1}{N^2}N\sigma^2 = \boxed{\frac{\sigma^2}{N}}$$

標本平均のばらつきは，Nが大きいほど小さくなる.

- **標本分散**は，N 個の測定値の $\bar{x}$ からのばらつきを表す．

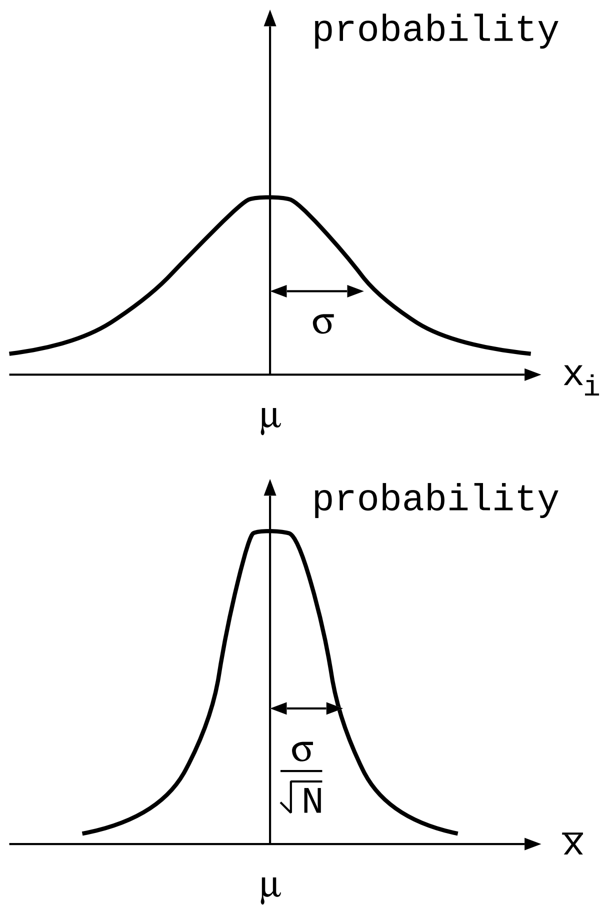
$$\boxed{s^2 \equiv \frac{1}{\mathbf{N-1}} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\bar{x}^2 \right)$$

ここで N のかわりに，$N-1$ で割っていることに着目したい．こう定義すると，標本分散の平均は分散 σ^2 になる．

$$\begin{aligned} \left\langle s^2 \right\rangle &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left\langle (x_i - \bar{x})^2 \right\rangle = \frac{1}{N-1} \left\langle \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2\bar{x} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} x_i}_{=N\bar{x}} + N\bar{x}^2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{N-1} \left(N(\mu^2 + \sigma^2) - N\left(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{N} \right) \right) = \frac{N-1}{N-1}\sigma^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$

<u>本当の分散 σ^2 が未知のときは，s^2 を代わりに使う．</u>（N が大きければ）

x_i それぞれの確率分布と $\bar{x}$ の確率分布



$\bar{x}$ の分散を $\frac{\sigma}{10}$ にするには $N = 100$ 回測定しなければならない.

加重平均と誤差の伝搬

1. 加重平均

- 同じ物理量を 2 つの方法で測ったとする．

方法	標本平均	その分散
1	$\bar{x}_1$	σ_1^2
2	$\bar{x}_2$	σ_2^2

- いま仮に分散 σ^2 をもつ測定方法 3 を考えると，これを N 回繰り返して得られる標本平均の分散は，$\frac{\sigma^2}{N}$ である．
- 第 1 の方法は，第 3 の方法を $N_1 = \frac{\sigma^2}{\sigma_1^2}$ 回繰り返したときと，同じ分散を持つ．同様に，第 2 の方法は，第 3 の方法を $N_2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_2^2}$ 回繰り返したときと，同じ分散を持つ．

- 第１の方法で得られた値$\bar{x}_1$と第２の方法で得られた値$\bar{x}_2$の平均は

$$\bar{x} \equiv \frac{N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2}{N_1 + N_2} = \frac{\frac{\sigma^2}{\sigma_1^2}\bar{x}_1 + \frac{\sigma^2}{\sigma_2^2}\bar{x}_2}{\frac{\sigma^2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma^2}{\sigma_2^2}} = \boxed{\frac{\frac{\bar{x}_1}{\sigma_1^2} + \frac{\bar{x}_2}{\sigma_2^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}}$$

をとるのが妥当である．$\bar{x}$を**加重平均**とよぶ.

- $\bar{x}$の分散は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\sigma_{\bar{x}}^2 &= \frac{1}{(N_1 + N_2)^2}\left(N_1^2\sigma_1^2 + N_2^2\sigma_2^2\right) \\
&= \frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}} < \mathrm{Min}(\sigma_1^2, \sigma_2^2)
\end{aligned}$$

- $\bar{x}_1$ と $\bar{x}_2$ が大きく異なるときは，加重平均をとるべきではない．
- 加重平均をとっていい目安は，

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| < \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

である．

2. 誤差の伝搬

- aとbを測定して，物理量$c = f(a,b)$を決めることを考えよう．
- aの平均をμ_1，分散をσ_1^2とし，またbの平均，分散をそれぞれμ_2, σ_2^2とする．

$$a = \mu_1 + u_1, \quad b = \mu_2 + u_2$$

と書くと，u_1, u_2は平均0をもち，分散はσ_1^2, σ_2^2である．

- u_1, u_2は微小と仮定すると，Taylor近似により

$$\begin{aligned} c = f(a,b) &= f(\mu_1 + u_1, \mu_2 + u_2) \\ &\simeq f(\mu_1, \mu_2) + \frac{\partial f(\mu_1, \mu_2)}{\partial \mu_1} u_1 + \frac{\partial f(\mu_1, \mu_2)}{\partial \mu_2} u_2 \end{aligned}$$

- cの平均は，$\langle u_1 \rangle = 0, \langle u_2 \rangle = 0$より

$$\langle c \rangle = f(\mu_1, \mu_2)$$

- cの分散

$$
\begin{aligned}
\left\langle (c - f(\mu_1, \mu_2))^2 \right\rangle &= \left\langle (\partial_{\mu_1} f \cdot u_1 + \partial_{\mu_2} f \cdot u_2)^2 \right\rangle \\
&= (\partial_{\mu_1} f)^2 \left\langle u_1^2 \right\rangle + (\partial_{\mu_2} f)^2 \left\langle u_2^2 \right\rangle \\
&\quad + 2 \partial_{\mu_1} f \cdot \partial_{\mu_2} f \underbrace{\left\langle u_1 u_2 \right\rangle}_{=0} \\
&= (\partial_{\mu_1} f)^2 \sigma_1^2 + (\partial_{\mu_2} f)^2 \sigma_2^2
\end{aligned}
$$

- 面積$A = L_1 L_2$の例. $\frac{\partial A}{\partial L_1} = L_2$, $\frac{\partial A}{\partial L_2} = L_1$ より，Aの分散は，L_1の分散σ_1^2とL_2の分散σ_2^2によって

$$
\sigma_A^2 = L_2^2 \sigma_1^2 + L_1^2 \sigma_2^2
$$

と与えられる． もし$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ならば$\sigma_A^2 = (L_1^2 + L_2^2)\sigma^2$である．

したがって，先週ノギスの実習で測定した名札の面積の場合,

$$\sigma = 0.0025\,\mathrm{cm}$$

だから，面積 $A = L_1 L_2$ の分散の平方根は

$$\sigma_A = \sqrt{L_1^2 + L_2^2} \times 0.0025\,\mathrm{cm}$$

となる.

- 宿題設問 5 — 誤差の伝搬を考慮して，名前カードの面積を

$$A \pm \sigma_A\,\mathrm{cm}^2$$

の形に求めなさい.

２項分布と正規分布

1. **２項分布**

- $P_k = \begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^k$ ただし $k = 0, \cdots, N$.
- 平均 $\langle k \rangle = Np$
- 分散 $\left\langle (k-Np)^2 \right\rangle = Np(1-p)$
- $N \to \infty$ の極限で

$$x \equiv \frac{k - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}$$

の分布関数

$$\sqrt{Np(1-p)} \cdot P_k \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

は平均値0，分散1の正規分布をする．（中心極限定理）

$$\boxed{p = \frac{1}{6}}$$

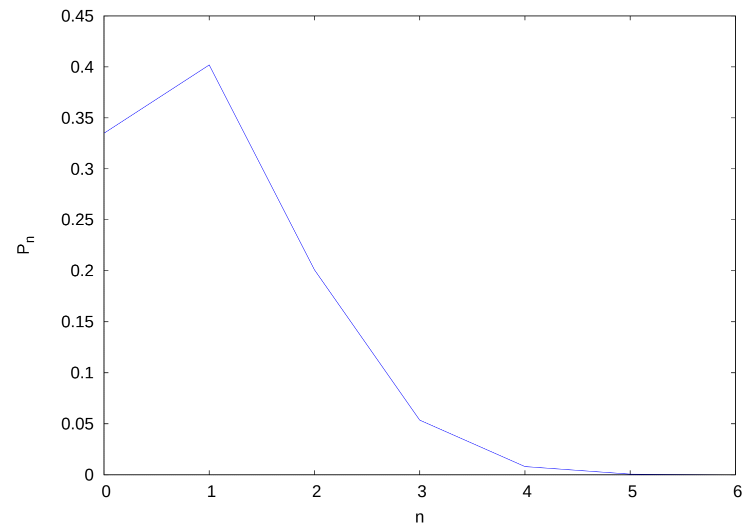
- $N = 6\,(n = 0, 1, \cdots, 6)$

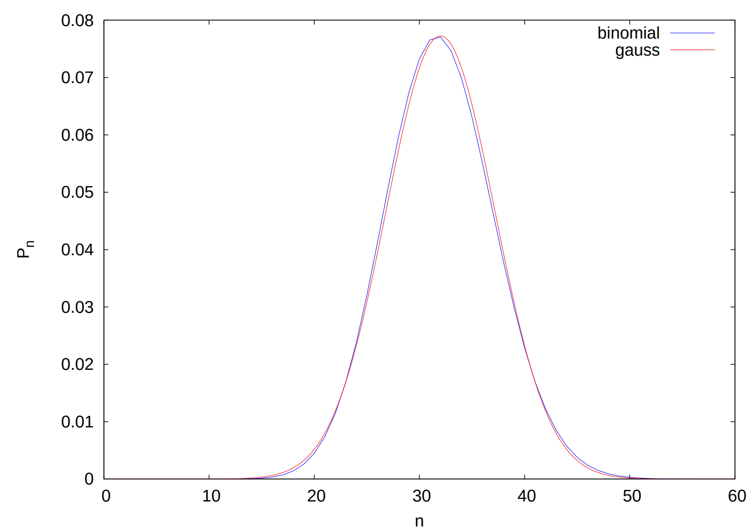
$$P_n = \binom{6}{n} \frac{5^{6-n}}{6^6}$$

- $N = 192\,(n = 0, 1, \cdots, 192)$

$$P_n = \binom{192}{n} \frac{5^{192-n}}{6^{192}}$$

は正規分布でよく近似される．



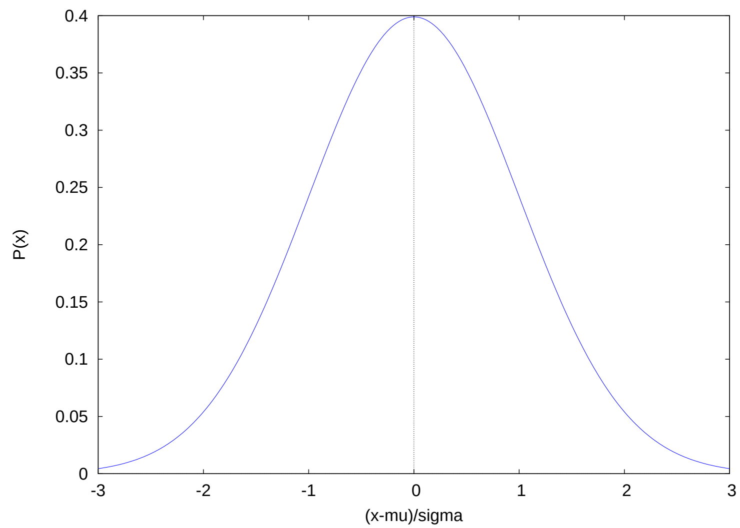


2. **正規分布**（Gauss 分布）

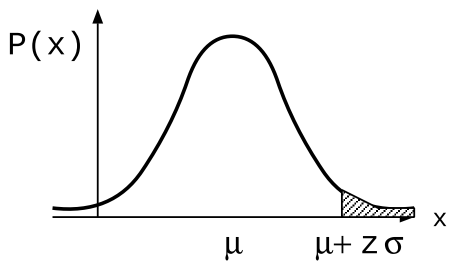
- 平均値 μ，分散 σ^2 の正規分布は

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

で与えられる．



- $x > \mu + z \cdot \sigma$の確率



z	確率
1	0.159
2	0.023
3	0.00135
$z_{0.950} = 1.645$	0.05
$z_{0.975} = 1.960$	0.025
$z_{0.990} = 2.326$	0.01

(a) $x \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]$である確率は，$1 - 2 \times 0.159 = 0.682.$

(b) $x \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$である確率は，$1 - 2 \times 0.023 = 0.954.$

(c) $x \in [\mu - z_{0.95}\,\sigma, \mu + z_{0.95}\,\sigma]$である確率は，$0.9.$

(d) $x \in [\mu - z_{0.975}\,\sigma, \mu + z_{0.975}\,\sigma]$である確率は，$0.95.$

中心極限定理

1. N 個の独立な変数 x_i $(i = 1, \cdots, N)$ を考える．それぞれ平均 μ_i および分散 σ_i^2 をもつ確率分布にしたがうとする．

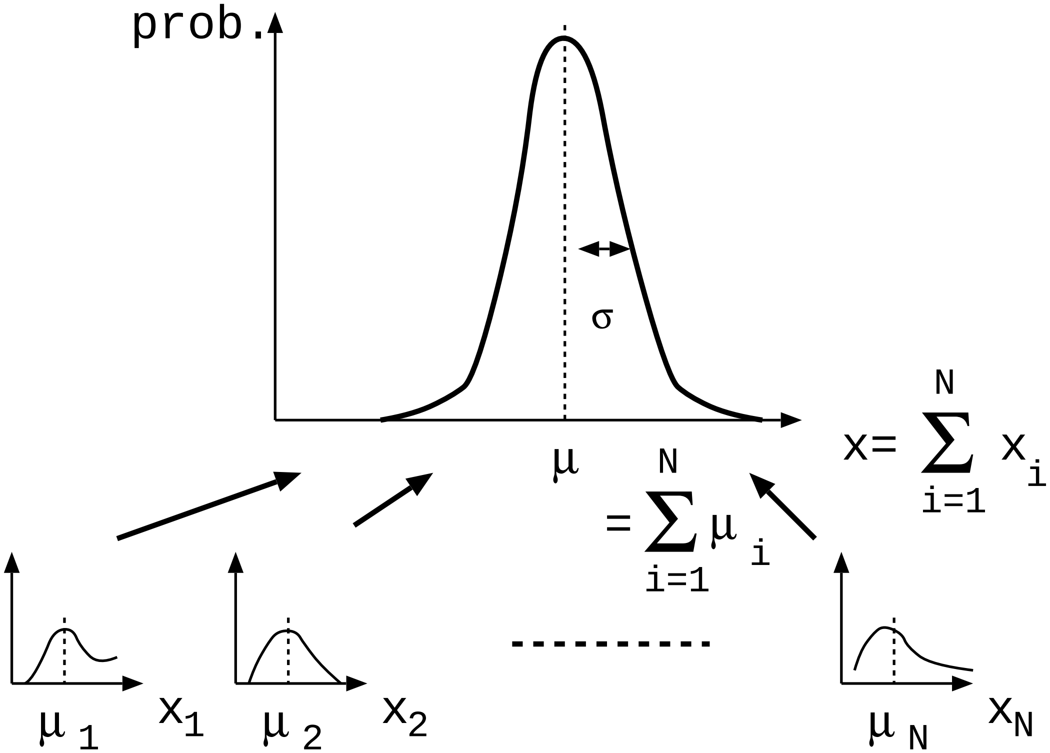
2. **中心極限定理** — $x \equiv \sum_{i=1}^{N} x_i$ は $N \gg 1$ のとき，平均 $\mu = \sum_{i=1}^{N} \mu_i$，分散 $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2$ の正規分布にしたがう．

3. いいかえると，$y \equiv \frac{1}{\sigma}(x - \mu)$ は，$N \to \infty$ で平均 0，分散 1 の正規分布にしたがう．

4. 平均 0，分散 1 の正規分布は，以下の平均値によって完全に決まる．

$$\left\langle y^{2n} \right\rangle = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}, \quad \left\langle y^{2n+1} \right\rangle = 0$$

5. 物理量の測定の場合，統計誤差に寄与する要素は数多くあるので，物理量の１回測定の結果は，真の値μのまわりに正規分布することが考えられる．



6. 補足：中心極限定理の証明 — ここでは $\left\langle y^3\right\rangle$ と $\left\langle y^4\right\rangle$ だけ計算してみよう. 簡単のため，$\mu_i = 0$ とする.

$$
\begin{aligned}
\left\langle y^3\right\rangle &= \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\langle x_i x_j x_k\rangle \\
&= \frac{1}{\sigma^3}\left(\sum_{i=1}^{N}\left\langle x_i^3\right\rangle + \sum_{i=1}^{N}\left\langle x_i^2\right\rangle \sum_{j\neq i}\underbrace{\langle x_j\rangle}_{=0} + 6\sum_{i=1}^{N-2}\underbrace{\langle x_i\rangle}_{=0}\sum_{j>i}\langle x_j\rangle\sum_{k>j}\langle x_k\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{N}\left\langle x_i^3\right\rangle
\end{aligned}
$$

ここで $\sigma^2 = \mathrm{O}(N)$ および $\sum_{i=1}^{N}\left\langle x_i^3\right\rangle = \mathrm{O}(N)$ より，

$$
\left\langle y^3\right\rangle = \mathrm{O}(1/\sqrt{N}) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
\left\langle y^4 \right\rangle &= \frac{1}{\sigma^4} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \langle x_i x_j x_k x_l \rangle \\
&= \frac{1}{\sigma^4} \Bigg(\sum_i \left\langle x_i^4 \right\rangle + \sum_i \left\langle x_i^3 \right\rangle \sum_{j \neq i} \langle x_j \rangle + 3 \sum_i \left\langle x_i^2 \right\rangle \sum_{j > i} \left\langle x_j^2 \right\rangle \\
&\quad +12 \sum_i \left\langle x_i^2 \right\rangle \sum_{j \neq i} \langle x_j \rangle \sum_{k > j} \langle x_k \rangle + 24 \sum_i \langle x_i \rangle \sum_{j > i} \langle x_j \rangle \sum_{k > j} \langle x_k \rangle \sum_{l > k} \langle x_l \rangle \Bigg) \\
&= \frac{1}{\sigma^4} \Bigg(\sum_i \left(\left\langle x_i^4 \right\rangle - \left\langle x_i^2 \right\rangle^2 \right) + 3 \sum_i \underbrace{\left\langle x_i^2 \right\rangle}_{=\sigma^2} \sum_j \left\langle x_j^2 \right\rangle \Bigg)
\end{aligned}
$$

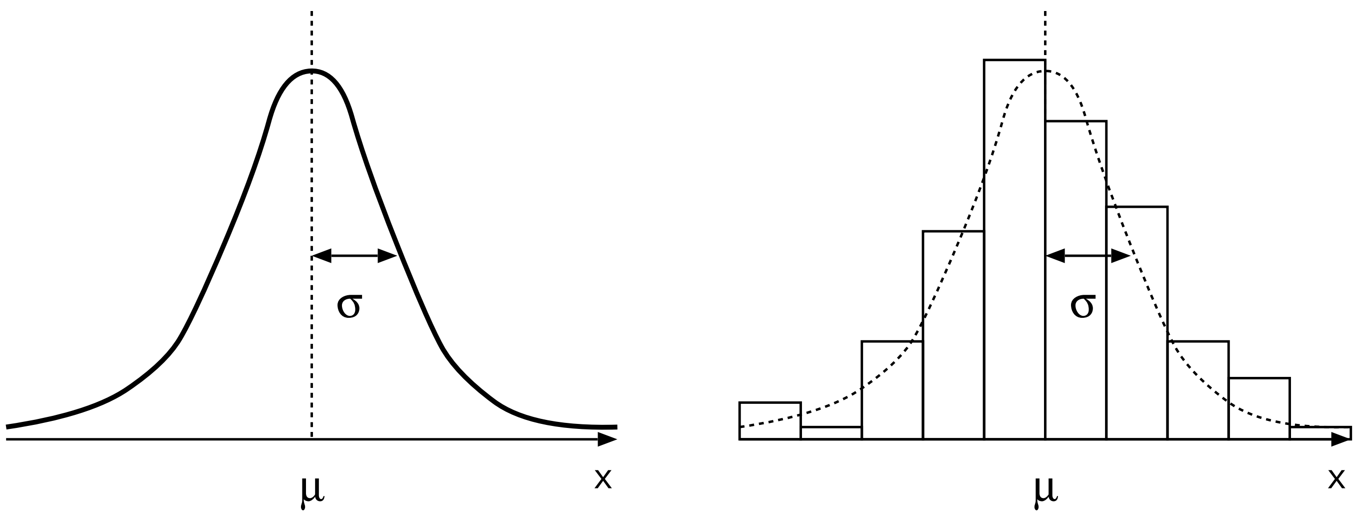
最初の和はNのオーダーにすぎないから，寄与せず，

$$
\left\langle y^4 \right\rangle \xrightarrow{N \to \infty} 3
$$

統計的推論

1. **仮説検定** — 平均μ，分散σ^2の正規分布をしている物理量を考える．N回の測定によって測定値$x_1, \cdots, x_N$が得られたとする．

   正規分布は，無限回（十分多数回）繰り返して得られる分布であり，有限N回の測定値の分布は，たとえば右のヒストグラムのように，正規分布からずれる．



- 測定値の標本平均と標本分散を

$$\bar{x} \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i, \quad s^2 \equiv \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

としよう.

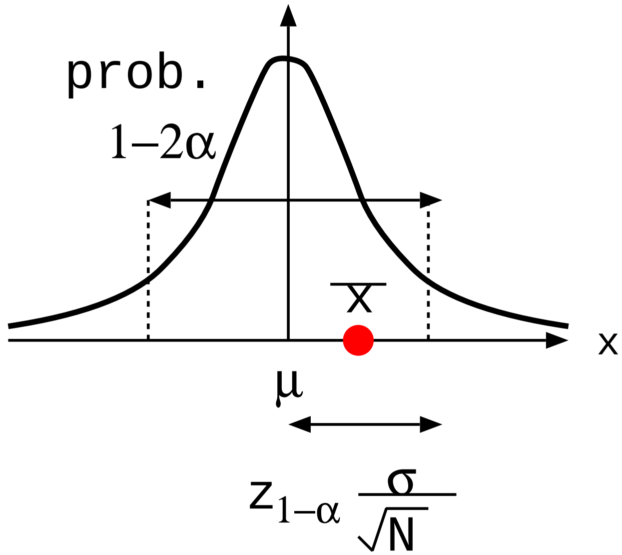
- $\bar{x}$ は平均 μ, 分散 $\frac{\sigma^2}{N}$ の正規分布にしたがうから,

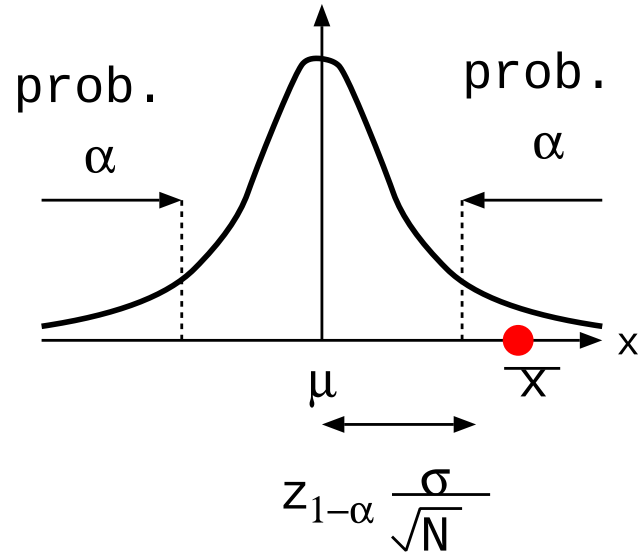
$$\mu - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \bar{x} < \mu + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

である確率は $1-2\alpha$ である. いいかえると,

$$\mu < \bar{x} - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad \text{または} \quad \mu > \bar{x} + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

である確率は 2α である.





$\bar{x}$が確率$1-2\alpha$の領域にある場合

$$\mu - z_{1-\alpha}\sigma < \bar{x} < \mu + z_{1-\alpha}\sigma$$

確率2αの領域にある場合

$$\bar{x} < \mu - z_{1-\alpha}\sigma$$

または

$$\mu + z_{1-\alpha}\sigma < \bar{x}$$

- Nが大きいときは，σ^2を標本分散s^2で置き換えられて，

$$\bar{x} < \mu - z_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{N}} \quad \text{または} \quad \bar{x} > \mu + z_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{N}}$$

である確率はだいたい2αである．[1]

- 測定で得られた$\bar{x}$が，確率2αの領域に入ってしまうようなμは確からしくないと考える．

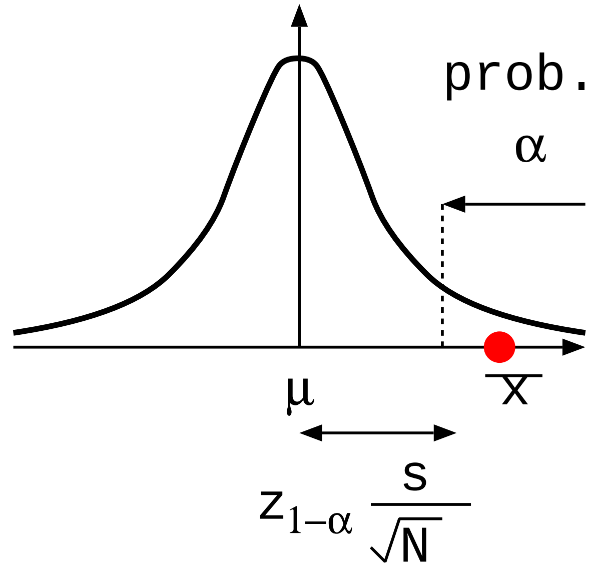
$$\mu < \bar{x} - z_{1-2\alpha}\frac{s}{\sqrt{N}} \quad \text{または} \quad \mu > \bar{x} + z_{1-2\alpha}\frac{s}{\sqrt{N}}$$

のどちらかの不等式が成り立つとき，**有意水準**2αで,「平均がμである」という仮説を棄却する．

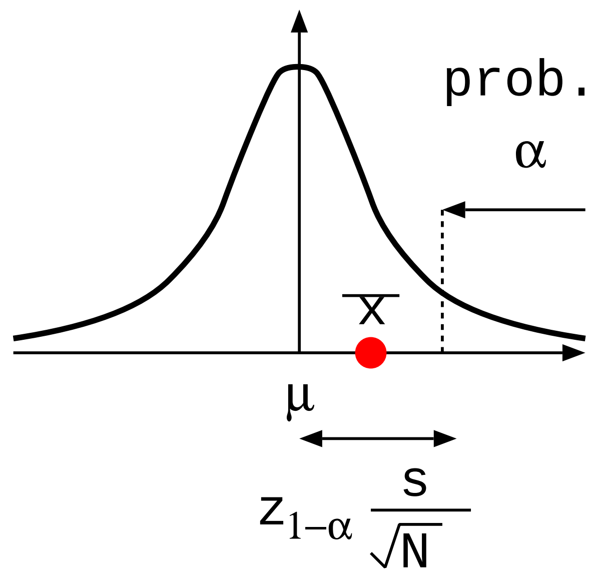
- $\bar{x}$が確率$1-2\alpha$でおこる範囲内にあるとき，仮説を許容する．これは，仮説が確率$1-2\alpha$で正しいということではない．

[1]本当は，$(\bar{x}-\mu)/(s/\sqrt{N})$は自由度$N-1$のt-分布をする．$N \gg 1$のとき，t-分布はほぼ正規分布．

平均μを有意水準2αで棄却



平均μを有意水準2αで許容



2α	z_α
32%	1
10%	1.645
5%	1.96

2. **区間推定** — 標本平均と標本分散から，μの確からしい区間を推定する．

- 標本平均$\bar{x}$が

$$\bar{x} > \mu + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

を満たす確率はαである．つまり

$$\mu < \bar{x} - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

である確率はαしかない．

- 同様に,

$$\mu > \bar{x} + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

である確率はαしかない．

- 標本平均$\bar{x}$と標本分散s^2から，μが区間

$$\left[\bar{x} - z_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{N}}, \quad \bar{x} + z_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{N}}\right]$$

にあることを**信頼度**$1-2\alpha$で推定する.

$z_{1-\alpha}$	信頼度%
1	68
1.645	90
2	95

- μがこの区間にあるとすると，$\bar{x}$は確率$1-2\alpha$で起こる領域内にある.
- μがこの区間にある確率が$1-2\alpha$ということではない.

- 物理実験で使う表記は，最確値とその誤差を

$$\boxed{\bar{x} \pm z_{1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{N}}}$$

の形に表す．　教科書では

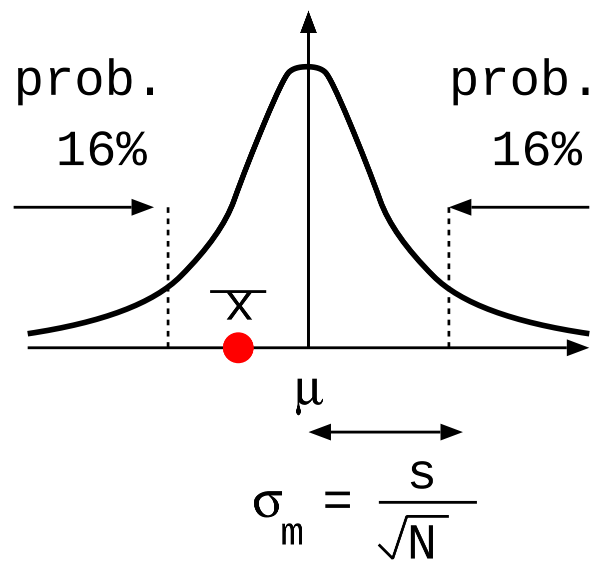
$$\sigma_m \equiv \frac{s}{\sqrt{N}}$$

を**最確値の誤差**と呼んでいる．

通常は，$z_{1-\alpha}=1$（$\alpha=0.16$）または$z_{1-\alpha}=2$（$\alpha=0.025$）を用いて，測定の結果を

$$\boxed{\bar{x}\pm\sigma_m} \quad \text{または} \quad \boxed{\bar{x}\pm 2\sigma_m}$$

と表す.



3. ここで紹介した統計的推論のほかにベイズ統計(Bayesian statistics)的推論があり，それを使うと仮説の成り立つ確率を議論することができる.

サイコロの実験

- 6つのサイコロをふる．1の目の出る回数を$x = 0, 1, \cdots, 6$とすると，xは2項分布する．（$p = \frac{1}{6}, N = 6$）

$$\langle x \rangle = Np = 1, \quad \left\langle (x-1)^2 \right\rangle = Np(1-p) = \frac{5}{6}$$

- 32回ふる．　毎回1の目の出る回数を$x_i\,(i = 1, \cdots, 32)$とする．平均と分散は，やはり

$$\langle x_i \rangle = 1, \quad \left\langle (x_i - 1)^2 \right\rangle = \frac{5}{6}$$

と与えられる．

- 標本平均と，標本分散

$$\bar{x} \equiv \frac{1}{32}\sum_{i=1}^{32} x_i, \quad s^2 \equiv \frac{1}{31}\left(\sum_{i=1}^{32} x_i^2 - 32\,\bar{x}^2\right)$$

の平均は

$$\langle \bar{x} \rangle = 1, \quad \left\langle s^2 \right\rangle = \frac{5}{6}$$

- 1の目の出る回数の最確値とその誤差は,

$$x_m \pm \sigma_m = \boxed{\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{32}}}$$

で与えられる.

- $32\bar{x} = \sum_{i=1}^{32} x_i$ は $N = 102$（$= 32 \times 6$），$p = \frac{1}{6}$ の2項分布に従う．$32 \gg 1$ だから，$\bar{x}$ の分布に，中心極限定理を応用できる．

したがって，$\bar{x}$ の分布は，ほぼ正規分布であり，その平均値と分散は，

$$
\begin{aligned}
\mu &= \langle \bar{x} \rangle = 1 \\
\sigma^2 &= \frac{1}{N} \left\langle s^2 \right\rangle = \frac{1}{32}\frac{5}{6} = \frac{5}{192} \Longrightarrow \sigma \simeq 0.161
\end{aligned}
$$