【問題 1】

p と q が自然数のとき，p で q を割った余りを $q \mod p$ と書く。以下の問に答えよ。

(1) $3^{16} \mod 1000$ を計算せよ。

(2) $3^{993} \mod 1000$ を計算せよ。

(3) x，n，p を自然数とする。$x^n \mod p$ を効率よく計算する方法を述べよ。

【問題 2】

巨大な回転装置の上に設置された円筒形の部屋があるとしよう。円筒の軸は鉛直方向である。この部屋には窓がないので外を見ることはできず，外の世界と通信することもできない。回転装置を駆動すると，円筒の軸を回転軸として部屋全体がある一定の角速度で回転する。その角速度はそれほど大きくはなく，中にいる人が壁際に立つとわずかに遠心力を感じる程度である。

あなたがこの部屋に入り，この部屋がどの向きに回転しているのか（上から見下ろして時計回りか反時計回りか）を推測するように言われたとしよう。部屋の中に何を持ち込んでもよいとしたら，あなたは何を持ち込み，どのような方法で回転方向を推測するか？できるだけ多くの方法を挙げよ。

また，その角速度の大きさを測定する方法についても述べよ。

【問題3】

重さがわずかに異なる N 個の金属片がある。これらを軽いものから重いものへと昇順に並べたい。手元には天秤があり，二つの金属片を天秤にかけるとどちらが重いのかがわかるので，これを利用する。なお，$N=2^n$（n は自然数）とする。また，i 番目に軽い金属片を $\boxed{i}$ で表し，金属片を並べ終えるまでに二つの金属片を天秤にかける回数を「総作業数」と呼ぶことにする。次の三つの問に答えよ。

(1) 初期状態として N 個の金属片を適当に左から右に一列に並べ，金属片のある各々の位置に左から順に $1,2,\ldots,N$ と番号を振る。i 番目と $i+1$ 番目の位置にある金属片を取り出して天秤にかけ，軽い方を i 番目，重い方を $i+1$ 番目の位置に戻す。この作業を，$i=1,2,\ldots,N-1$ と変化させながら繰り返すと，最も重い金属片は右端にくる。このアイディアをもとに，できるだけ少ない総作業数で，重さが左から右に昇順になるよう金属片を並べ替える手続きを考え，$N=8$ のときの初期状態として，金属片が左から右に一列に $\boxed{7}\boxed{3}\boxed{5}\boxed{1}\boxed{8}\boxed{4}\boxed{6}\boxed{2}$ と並んでいる場合，$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{7}\boxed{8}$ と並んでいる場合のそれぞれに対し，考案した手続きに基づく総作業数を示せ。また，考案した並び替え手続きの概要を説明せよ。さらに，総作業数が最も多くなる初期状態，最も少なくなる初期状態はどんな場合かを考察し，それぞれの場合に対して要する総作業数を N を用いて示せ。

(2) (1) と異なる手続きを考える。まずその基となるアイディアを次の例を使って説明する。なお，以後，n 個の金属片が左から右に重さが昇順に並んでいるとき，それを長さ n の順序列と呼ぶこととする。4個の金属片が二つの長さ2の順序列 $\boxed{1}\boxed{3}$ と $\boxed{2}\boxed{4}$ に分けられていたとする。これらを併合して長さ4の順序列を新たに作る。初めに，元となる順序列のそれぞれから最も軽い金属片（左端）$\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ を天秤にかけ，より軽い $\boxed{1}$ を新たに作る順序列の最初の金属片とし，重い方の $\boxed{2}$ を元の場所に戻す。このとき，元の順序列は $\boxed{3}$ と $\boxed{2}\boxed{4}$ となる。続いて，元の順序列のそれぞれから最も軽い金属片 $\boxed{3}$ と $\boxed{2}$ を天秤にかけ，より軽い $\boxed{2}$ を新たに作る順序列に右から加えて $\boxed{1}\boxed{2}$ とし，重い方の $\boxed{3}$ を元の場所に戻す。このとき，元の順序列は $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ になる。さらに，元の順序列のそれぞれから最も軽い金属片 $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ を天秤にかけ，より軽い $\boxed{3}$ を新たに作る順序列に右から加えて $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ とし，重い方の $\boxed{4}$ を元の場所に戻す。このとき，元の順序列の一方はなくなったので，他方の順序列 $\boxed{4}$ を無条件に新たな順序列に右から連結すると，順序列 $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$ を得る。このアイディアを元の問題に応用する。初期状態として N 個の金属片を適当に左から右に一列に並べる。この並びは，長さ1の順序列が全部で N あるとみなせる。そこで，これらを左から二つずつ選んで併合すると，長さ2の順序列が全部で $N/2$ できる。こうして，順に順序列を併合して，元の倍の長さの順序列を作る操作を繰り返すと，最終的に長さ N の順序列を得る。この並べ替え手続きについて，総作業数が最も多くなる初期状態，最も少なくなる初期状態はどんな場合かを考察し，それぞれの場合に対して要する総作業数を N を用いて示せ。

(3) 総作業数が少ないほどより優れていると考えよう。(1)，(2) で考察した並べ替え手続きを比較し，N が大きくなったとき，どのような場合に，どちらが優れているのかを論じよ。